



TESIS - SM 142501

**ALIRAN TAK TUNAK KONVEKSI CAMPURAN PADA
FLUIDA KENTAL *MAGNETOHYDRODYNAMICS* (MHD)
YANG MELEWATI PELAT DATAR**

FIRDHA DWISHAFARINA ZAINAL
NRP 1214 201 024

Dosen Pembimbing:
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



THESIS - SM 142501

**UNSTEADY MIXED CONVECTION FLOW IN VISCOUS
FLUID MAGNETOHYDRODYNAMICS (MHD) PAST A FLAT
PLATE**

FIRDHA DWISHAFARINA ZAINAL
NRP 1214 201 024

Supervisor:
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

**ALIRAN TAK TUNAK KONVEKSI CAMPURAN PADA
FLUIDA KENTAL *MAGNETOHYDRODYNAMICS* (MHD)
YANG MELEWATI PELAT DATAR**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di


Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

FIRDHA DWISHAFARINA ZAINAL
NRP. 1214 201 024

Tanggal Ujian : 26 Mei 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh :



Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

(Pembimbing 1)



Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.
NIP. 19611115 198703 1 003

(Pembimbing 2)



Dr. Imam Mukhlash, S.Si., MT.
NIP. 19700831 199403 1 003

(Penguji)



Dr. Hariyanto, M.Si.
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,



Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

ALIRAN TAK TUNAK KONVEKSI CAMPURAN PADA FLUIDA KENTAL *MAGNETOHYDRODYNAMICS* (MHD) YANG MELEWATI PELAT DATAR

Nama Mahasiswa : Firdha Dwishafarina Zainal
NRP : 1214 201 024
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

ABSTRAK

Pengaruh dari *magnetohydrodynamics* (MHD) pada aliran konveksi campuran pada fluida kental yang melewati suatu pelat datar dibahas dalam tesis ini. Keberadaan medan magnet diterapkan dalam aliran lapisan batas dan diasumsikan pelat datar dalam keadaan tidak slip. Persamaan lapisan batas berdimensi dibangun dari model fisik aliran fluida kental yang melewati pelat datar serta melalui pendekatan Boussinesq dan lapisan batas. Persamaan lapisan batas yang diperoleh ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan tak berdimensi dengan menggunakan variabel - variabel tak berdimensi. Persamaan tak berdimensi selanjutnya ditransformasikan menjadi persamaan similaritas menggunakan variabel similaritas dan fungsi alir. Persamaan similaritas yang ada kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan metode Keller-Box. Berdasarkan simulasi numerik diperoleh bahwa pengaruh dari parameter magnetik dan parameter konveksi mengakibatkan meningkatnya profil kecepatan. Sebaliknya, meningkatnya bilangan Prandtl mengakibatkan penurunan profil kecepatan. Pengaruh dari parameter magnetik, bilangan Prandtl dan parameter konveksi mengakibatkan profil temperatur menurun.

Kata kunci: konveksi campuran, *magnetohydrodynamics* (MHD), fluida kental, Metode Keller-Box

UNSTEADY MIXED CONVECTION FLOW IN VISCOUS FLUID MAGNETOHYDRODYNAMICS (MHD) PAST A FLAT PLATE

Name : Firdha Dwishafarina Zainal
NRP : 1214 201 024
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

ABSTRACT

The effect of magnetohydrodynamics (MHD) on mixed convection flow in viscous fluid past a flat plate are presented. The presence of magnetic field will applied in the boundary layer flow. It is assumed that the flate plate is no slip condition. We get the boundary layer governing equations from physical model of fluid flow past a flat plate under the Boussinesq and boundary layer approximation. Boundary layer equations is transformed to a dimensionless form by applying several dimensionless variables - variables . Furthermore, the dimensionless equations are transformed to similarity equations by applying similarity variables and stream function. Similarity equations are solved numerically by using Keller-Box method. Based on the numerical results, the velocity profiles increase when both magnetic parameter and convection parameter increase. Otherwise, the velocity profile decrease when the convection parameter increase. The effects of all parameters such as magnetic parameter, Prandtl number and convection parameter are the temperature profiles decreased.

Keywords: mixed convection, magnetohydrodynamics (MHD), viscous fluid, Keller-Box Method

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Kontribusi Hasil Penelitian	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Fluida	7
2.2.1 Viskositas	7
2.2.2 Fluida Newtonian	8
2.2.3 Fluida Non-Newtonian	8
2.3 Tipe Aliran Berdasarkan Kriteria Waktu	8
2.4 Konveksi Panas	9
2.4.1 Konveksi Bebas (<i>Free Convection</i>)	9
2.4.2 Konveksi paksa (<i>Forced Convection</i>)	10
2.4.3 Konveksi campuran (<i>Mixed Convection</i>)	10
2.5 Magnetohydrodynamics (MHD)	10
2.6 Aliran Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>)	12

2.7	Metode Beda Hingga (<i>Finite Difference Method</i>)	13
2.7.1	Metode Keller Box	14
BAB III	METODA PENELITIAN	17
3.1	Tahapan Penelitian	17
3.1.1	Tahap Pembentukan Model	17
3.1.2	Tahap Implementasi	18
3.1.3	Tahap Analisis Hasil	18
3.2	Tempat Penelitian	19
BAB IV	PEMBENTUKAN MODEL MATEMATIKA	21
4.1	Persamaan Kontinuitas	22
4.2	Persamaan Momentum	25
4.2.1	Pengaruh Gaya Magnetik	29
4.2.2	Pengaruh Aliran Konveksi	30
4.3	Persamaan Energi	31
4.4	Pendekatan Boussinesq	34
4.5	Model Matematika Berdimensi	35
4.6	Model Matematika Tak Berdimensi	36
4.7	Pendekatan Lapisan Batas	37
4.8	Fungsi Alir (<i>Stream Function</i>)	39
4.8.1	Persamaan Similaritas	39
BAB V	PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA	43
5.1	Penyelesaian Numerik Model	43
5.1.1	Diskritisasi Model	43
5.1.2	Linierisasi Model	45
5.1.3	Teknik Eliminasi Blok	47
5.2	Hasil Simulasi dan Pembahasan	53
5.2.1	Pengaruh Parameter Magnetik (M)	53
5.2.2	Pengaruh Bilangan Prandtl (Pr)	55
5.2.3	Pengaruh Parameter Konveksi (λ)	57
5.2.4	Pengaruh Parameter Magnetik dan Bilangan Prandtl	58
5.2.5	Pengaruh Parameter Magnetik dan Parameter Konveksi	60
5.2.6	Pengaruh Bilangan Prandtl dan Parameter Konveksi	61
BAB VI	KESIMPULAN DAN SARAN	63
6.1	Kesimpulan	63
6.2	Saran	64

DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	67
BIODATA PENULIS	97

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Penerapan aliran fluida yang melewati pelat datar yaitu elektroplating (Alian, 2010)	1
Gambar 1.2	Aliran Fluida pada Pelat Datar	2
Gambar 2.1	Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik (Ishak, 2010)	5
Gambar 2.2	Pengaruh parameter magnetik terhadap profil kecepatan dan profil temperatur dengan $\lambda = 0.2$, $Pr = 0.5$ (Mukhopadhyay, 2014)	6
Gambar 2.3	Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik pada fluida viskoelastik (Wanti, 2015)	6
Gambar 2.4	Grafik kurva tegangan geser fluida non-Newtonian dan fluida Newtonian (Munson dkk, 2003)	9
Gambar 2.5	Lapisan Batas di Sekitar Airfoil	13
Gambar 2.6	Stensil Skema Keller-Box	14
Gambar 3.1	Model Fisik dan Sistem Koordinat dari Lapisan Batas Aliran Fluida Kental yang Melewati Sebuah Pelat Datar ...	17
Gambar 4.1	Model Fisik dan Sistem Koordinat dari Lapisan Batas Aliran Fluida Kental yang Melewati Sebuah Pelat Datar ...	21
Gambar 4.2	Volume Atur	23
Gambar 4.3	Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur	24
Gambar 5.1	Profil Kecepatan Variasi Parameter Magnetik	54
Gambar 5.2	Profil Temperatur Variasi Parameter Magnetik	54
Gambar 5.3	Profil Kecepatan Variasi bilangan Prandtl	56
Gambar 5.4	Profil Temperatur Variasi bilangan Prandtl	56
Gambar 5.5	Profil Kecepatan Variasi Parameter Konveksi	57
Gambar 5.6	Profil Temperatur Variasi Parameter Konveksi	58
Gambar 5.7	Profil Kecepatan Variasi Parameter Magnetik dan Bilangan Prandtl	59
Gambar 5.8	Profil Temperatur Variasi Parameter Magnetik dan Bilangan Prandtl	59

Gambar 5.9	Profil Kecepatan Variasi Parameter Magnetik dan Parameter Konveksi	60
Gambar 5.10	Profil Temperatur Variasi Parameter Magnetik dan Parameter Konveksi	61
Gambar 5.11	Profil Kecepatan Variasi Bilangan Prandtl dan Parameter Konveksi	62
Gambar 5.12	Profil Temperatur Variasi Bilangan Prandtl dan Parameter Konveksi	62

DAFTAR SIMBOL

ρ	Densitas fluida
μ	Viskositas dinamik
\mathbf{V}	Komponen kecepatan fluida, dengan $\mathbf{V} = (u, v, 0)$
u	Komponen kecepatan pada sumbu- x
v	Komponen kecepatan pada sumbu- y
g	Gravitasi
$\hat{\mathbf{n}}$	Vektor normal terhadap elemen dA
\mathbf{F}	Gaya pada benda
F_x	Gaya pada sumbu- x
F_y	Gaya pada sumbu- y
J	Kerapatan arus
\mathbf{B}	Gaya magnet
B_0	Medan magnet
\mathbf{b}	Induksi medan magnet
E	Medan listrik
σ	Konduktivitas listrik
k	Konduktivitas panas
p	Tekanan
p_h	Tekanan hidrostatik
p_d	Tekanan dinamis
M	Parameter magnetik
λ	Parameter konveksi
Pr	Bilangan Prandtl
Re	Bilangan Reynolds
T	Temperatur
T_w	Temperatur konstan pada dinding
U_w	Kecepatan konstan pada dinding
U_∞	Kecepatan aliran bebas
T_∞	Temperatur disekitar pelat
x	Koordinat arah gerak permukaan
y	Koordinat arah normal terhadap gerak permukaan
t	Waktu

\forall	Volume fluida
ν	Viskositas kinematik
τ	Tegangan geser pada fluida (<i>stress tensor</i>)
ψ	Fungsi aliran
α	Diffusivitas thermal

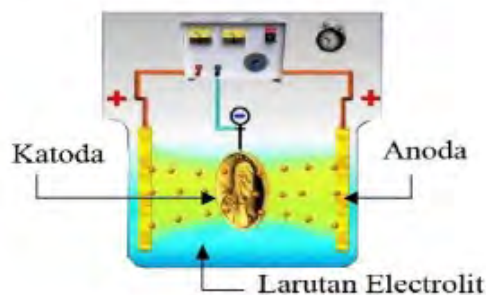
BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, batasan masalah, tujuan, manfaat dan kontribusi penelitian ini. Berikut dijelaskan setiap bagian dalam beberapa subbab di bawah ini.

1.1 Latar Belakang

Istilah *Magnetohydrodynamics* terdiri dari kata *magneto* yang berarti medan magnet, *hydro* yang berarti cairan atau fluida dan *dynamic* yang berarti pergerakan. *Magnetohydrodynamics* (MHD) dapat diartikan suatu pergerakan aliran fluida penghantar listrik dibawah pengaruh medan magnet. Penelitian mengenai MHD penting kaitannya dengan bidang teknik dan industri. Penerapan MHD dalam bidang teknik pada awalnya sebagai MHD power generator, generator MHD adalah alat untuk mengubah energi panas dari bahan bakar secara langsung menjadi energi listrik tanpa generator listrik secara konvensional. Sistem generator ini mempunyai efisiensi yang tinggi dan polusi yang rendah. Elektroplating adalah suatu proses pelapisan suatu logam secara elektrolisis melalui arus searah dan larutan kimia (elektrolit). Hal ini bertujuan untuk melindungi logam dari serangan korosi karena logam pelapis tersebut akan memutuskan interaksi dengan lingkungan sehingga terhindar dari proses oksida. Elektroplating merupakan salah satu contoh penerapan aliran fluida yang melewati pelat datar, dapat dilihat pada Gambar 1.1 (Alian, 2010).

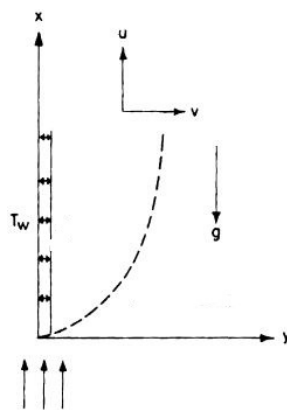


Gambar 1.1: Penerapan aliran fluida yang melewati pelat datar yaitu elektroplating (Alian, 2010)

Perpindahan panas secara konveksi adalah perpindahan panas dari suatu tempat ke tempat lain yang dengan perantara fluida yang disebabkan adanya perbedaan temperatur. Konveksi secara garis besar dibagi menjadi dua yaitu konveksi bebas dan konveksi paksa. Konveksi bebas terjadi ketika aliran fluida dipengaruhi oleh perbedaan temperatur atau dapat disebut dengan efek gaya apung sedangkan konveksi paksa merupakan konveksi yang dipengaruhi oleh adanya gaya luar. Namun pada perkembangannya, dikenal juga konveksi campuran yaitu konveksi yang terjadi pada saat konveksi bebas dan konveksi paksa terjadi pada saat bersamaan.

Penelitian mengenai pengaruh konveksi campuran banyak diteliti pada fluida Newtonian maupun fluida non-Newtonian. Untuk fluida Newtonian, hal ini disebabkan fluida Newtonian merupakan fluida yang mempunyai hubungan linier antara besarnya tegangan geser yang diterapkan dan laju perubahan bentuk yang diakibatkan (Widodo, 2015). Sedangkan pada fluida non-Newtonian, fluida ini tidak akan terus mengalir ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida yang disebabkan ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida non-Newtonian maka viskositas fluida ini akan berubah (Siswono, 2015). Sehingga pada penelitian ini menggunakan jenis fluida Newtonian yaitu fluida kental (*viscous fluid*).

Banyak penelitian tentang pengaruh medan magnet pada fluida untuk aliran konveksi bebas, konveksi paksa dan konveksi campuran yang melewati suatu benda. Oleh karena itu, pada Tesis ini, akan dilakukan penelitian permasalahan keberadaan serta pengaruh dari MHD pada aliran konveksi campuran tak tunak *unsteady* pada fluida kental yang melewati suatu pelat datar. Langkah awal yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan ini dengan menggunakan model matematika yang diturunkan dari persamaan pembangun berdasarkan fenomena fisik yang ada.



Gambar 1.2: Aliran Fluida pada Pelat Datar

Deskripsi dari permasalahan yang diilustrasikan pada Gambar 1.2 menunjukkan bentuk geometri dari masalah lapisan batas pada pelat datar. Aliran dari fluida pada permasalahan ini bergerak dari bawah kemudian melewati sebuah pelat datar yang terbenam di dalam fluida kental yang *incompressible*. Selanjutnya upaya awal yang dilakukan dalam pemecahan ini adalah menyelesaikan persamaan lapisan batas yang terbentuk. Lapisan batas tersebut diformulasikan untuk mendapatkan persamaan berdimensi yang kemudian ditransformasikan ke dalam bentuk tak berdimensi. Aliran yang diteliti termasuk aliran tak tunak sehingga persamaan kendali yang ada ditransformasikan ke dalam variabel similaritas. Selanjutnya semua sistem persamaan differensial ini akan diselesaikan secara numerik menggunakan Metode Keller-Box. Hasil numerik yang akan diperoleh, digunakan untuk menganalisis pengaruh parameter magnetik, pengaruh parameter konveksi serta bilangan Prandtl terhadap profil kecepatan dan profil temperatur.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang ada, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana membangun model matematika dari aliran konveksi campuran tak tunak yang dipengaruhi MHD pada fluida kental yang melewati pelat datar.
2. Bagaimana penyelesaian numerik dari model matematika aliran konveksi campuran tak tunak pada fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan menggunakan metode Keller-Box.
3. Bagaimana pengaruh dari parameter magnetik, parameter konveksi, dan bilangan Prandtl terhadap profil kecepatan dan profil temperatur.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Fluida yang digunakan bersifat *incompressible* dan termasuk aliran laminar.
2. Objek geometri penelitian adalah pelat datar dengan temperatur panas konstan.
3. Induksi medan magnet dan pengaruh konduksi pada pelat datar tidak ada.
4. Tidak ada tegangan pada aliran fluida sehingga medan listrik nol.
5. Penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga Keller-Box.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Membangun model matematika dari aliran konveksi campuran tak tunak yang dipengaruhi MHD pada fluida kental yang melewati pelat datar.
2. Mendapatkan solusi numerik dari model matematika aliran konveksi campuran tak tunak pada fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan menggunakan metode Keller-Box.
3. Menganalisa pengaruh dari parameter magnetik, parameter konveksi, dan bilangan Prandtl terhadap profil kecepatan dan profil temperatur.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah mengetahui temperatur dan kecepatan fluida dan pengembangan ilmu Matematika terapan dalam pemanfaatan di bidang industri contohnya dalam bidang elektroplating (pelapisan logam dengan listrik).

1.6 Kontribusi Hasil Penelitian

Kontribusi hasil penelitian ini terhadap pengembangan ilmu di bidang teknologi dan industri adalah pada elektroplating (pelapisan logam dengan listrik).

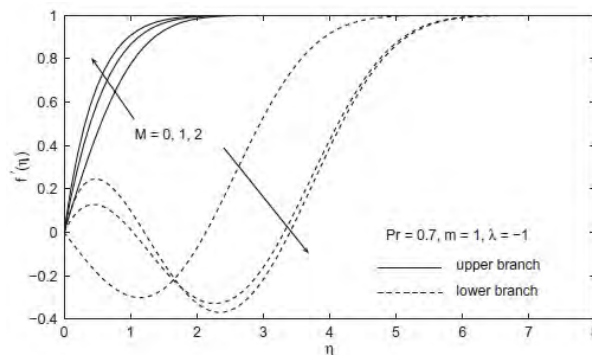
BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Bab ini menjelaskan tentang penelitian terdahulu dan teori yang digunakan dalam melakukan penelitian. Berikut dijelaskan penelitian - penelitian yang telah ada sebelumnya serta teori yang berkaitan dengan penyelesaian masalah dalam penelitian masalah ini.

2.1 Penelitian Terdahulu

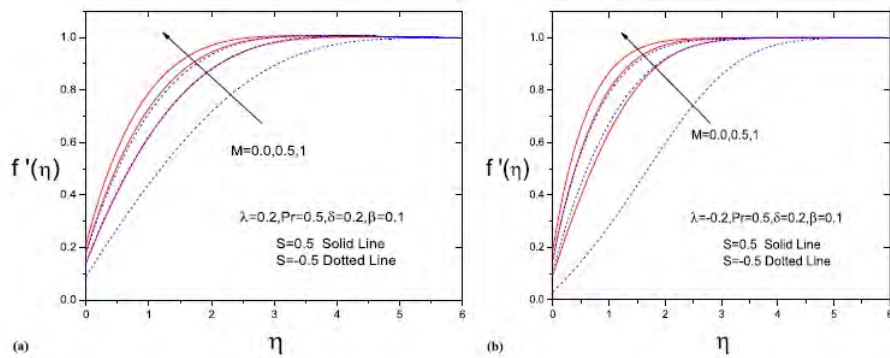
Pada penelitian yang dilakukan oleh Ishak dkk (2010), dalam papernya yang berjudul *MHD Mixed Convection Flow Adjacent to a Vertical Plate with Prescribed Surface Temperature*. Penelitian ini menjelaskan tentang aliran konveksi campuran MHD yang melewati sebuah vertikal pelat dengan suhu permukaan yang ditentukan, aliran ini bersifat tunak *steady*. Hasil yang diperoleh, diselesaikan dengan menggunakan skema beda hingga.



Gambar 2.1: Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik (Ishak, 2010)

Hasil numeriknya menjelaskan tentang pengaruh dari parameter magnetik dan pengaruh dari bilangan Prandtl terhadap profil kecepatan dan profil temperatur. Pada pengaruh variasi parameter magnetik dapat dilihat pada Gambar 2.1 bahwa semakin meningkatnya parameter magnetik maka semakin meningkat juga profil kecepatan sedangkan meningkatnya parameter magnetik mengakibatkan profil temperatur turun.

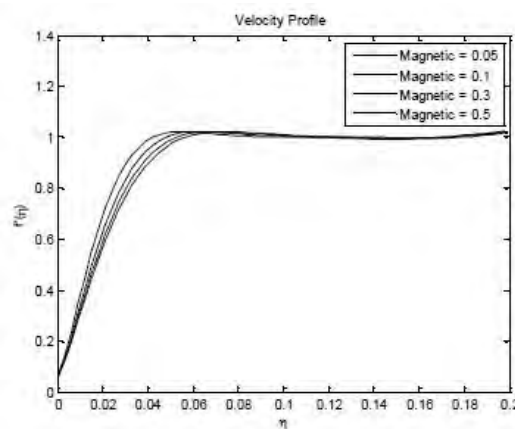
Penelitian mengenai aliran konveksi campuran MHD yang melewati pelat datar juga diteliti oleh Makinde dan Aziz (2010) dan Mukhopadhyay dan Mandal (2014). Makinde dan Aziz (2010) menjelaskan tentang aliran konveksi campuran



Gambar 2.2: Pengaruh parameter magnetik terhadap profil kecepatan dan profil temperatur dengan $\lambda = 0.2$, $Pr = 0.5$ (Mukhopadhyay, 2014)

MHD dan penyelesaian numeriknya menggunakan Runge-Kutta orde 6, sedangkan Mukhopadhyay dan Mandal (2014) pada penelitiannya, menjelaskan tentang aliran lapisan batas konveksi campuran MHD yang melewati vertikal pelat berporos. Pada penelitian ini terdapat pengaruh slip dan adanya *suction/blowing*. Berdasarkan hasil numerik yang dapat dilihat pada Gambar 2.2, pengaruh parameter magnetik terhadap profil kecepatan dan profil temperatur yaitu semakin meningkatnya parameter magnetik semakin meningkat juga profil kecepatan sebaliknya profil temperatur akan menurun seiring dengan meningkatnya parameter magnetik.

Sedangkan penelitian lain yang dilakukan oleh Wanti (2015), dalam tesisnya yang berjudul Fluida viskoelastik yang melewati pelat datar dengan memperhatikan faktor hidrodinamika magnet. Wanti (2015) menjelaskan tentang aliran fluida MHD pada fluida viskoelastik dan pada keadaan tunak (*steady*), penyelesaian dari permasalahan ini menggunakan metode beda hingga eksplisit FTCS.



Gambar 2.3: Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik pada fluida viskoelastik (Wanti, 2015)

Hasil numerik dari penelitian ini adalah pengaruh parameter magnetik, parameter viskoselastik, bilangan Prandtl dan bilangan Eckert terhadap profil kecepatan dan temperatur. Salah satu hasil numerik pengaruh dari parameter magnetik terhadap profil kecepatan dapat dilihat pada Gambar 2.3, ditunjukkan bahwa semakin meningkatnya parameter magnetik maka profil kecepatan juga akan naik.

2.2 Fluida

Zat yang tersebar di alam dibedakan dalam tiga fase, yaitu fase padat, cair, dan gas. Karena fase cair dan gas memiliki karakter tidak mempertahankan bentuk yang tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir, dengan demikian keduanya disebut fluida. Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun kecilnya tegangan geser tersebut (Widodo, 2012).

Perbedaan zat cair dan gas ialah zat cair merupakan zat yang tak mampu mampat (*incompressible*), sedangkan gas merupakan zat yang mampu mampat (*compressible*). Kemampatan adalah perubahan (pengecilan) volume karena adanya perubahan (penambahan) tekanan. Untuk fluida cair, tekanan dapat diabaikan dan viskositasnya akan turun dengan cepat bila temperaturnya dinaikkan. Pada fluida mengenal adanya viskositas atau kekentalan fluida dan berdasarkan karakteristiknya fluida fase cair dibagi menjadi dua yaitu fluida Newtonian dan Non-Newtonian.

2.2.1 Viskositas

Pengukuran dari ketahanan fluida yang diubah baik dengan tekanan maupun tegangan. Pada fluida, viskositas adalah kekentalan atau gesekan internal. Oleh karena itu, air yang tipis, memiliki viskositas lebih rendah, sedangkan madu yang kental, memiliki viskositas yang lebih tinggi. Sederhananya, semakin rendah viskositas suatu fluida, semakin besar juga pergerakan dari fluida tersebut. Viskositas menjelaskan ketahanan internal fluida untuk mengalir dan dapat digunakan untuk menganalisa pengukuran dari pergeseran fluida. Sebagai contoh viskositas yang tinggi dari magma akan menciptakan statovolcano yang tinggi dan curam karena tidak dapat mengalir terlalu jauh sebelum mendingin, sedangkan viskositas yang lebih rendah dari lava akan menciptakan volcano yang rendah dan lebar. Seluruh fluida (kecuali superfluida) memiliki ketahanan dari tekanan sehingga disebut kental, tetapi fluida yang tidak memiliki ketahanan tekanan dan tegangan disebut fluida ideal.

2.2.2 Fluida Newtonian

Fluida Newtonian (istilah yang diperoleh dari nama Isaac Newton) adalah suatu fluida yang memiliki kurva tegangan/regangan yang linier. Contoh umum dari fluida yang memiliki karakteristik ini adalah air. Keunikan dari fluida newtonian adalah fluida ini akan terus mengalir sekalipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Hal ini disebabkan karena viskositas dari suatu fluida newtonian tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas dari suatu fluida newtonian hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Viskositas sendiri merupakan suatu konstanta yang menghubungkan besar tegangan geser dan gradien kecepatan pada persamaan (Munson dkk, 2003)

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

dengan:

τ : tegangan geser

μ : viskositas fluida

$\frac{du}{dy}$: gradien kecepatan fluida

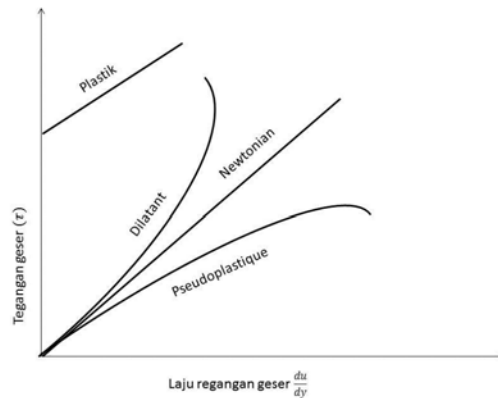
2.2.3 Fluida Non-Newtonian

Fluida non-Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini yang menyebabkan fluida non-Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan (berkebalikan dengan fluida Newtonian). Berikut ini adalah contoh dari fluida Non-Newtonian dalam kehidupan sehari-hari, yakni fluida plastik padat, fluida eksponensial, fluida viskoelastik (yang memiliki karakteristik viskos dan elastik), fluida tiksotropik atau fluida yang viskositasnya bergantung pada waktu, dan fluida reopektik atau fluida yang viskositasnya seolah makin lama makin besar.

Hal ini diperjelas pada Gambar 2.4 menunjukkan kurva tegangan geser dengan gradient kecepatan fluida yang berkarakteristik Newtonian dan non-Newtonian. Fluida non-Newtonian yang menunjukkan peningkatan viskositas (peningkatan pergeseran) merupakan fluida *tixotropic dilatant*, sedangkan yang menunjukkan penurunan viskositas merupakan fluida *rebopectic pseudoplastic*.

2.3 Tipe Aliran Berdasarkan Kriteria Waktu

Menurut Widodo (2012), tipe aliran yang dicirikan dengan perubahan waktu terhadap kecepatan dapat dibagi menjadi dua yaitu :



Gambar 2.4: Grafik kurva tegangan geser fluida non-Newtonian dan fluida Newtonian (Munson dkk, 2003)

1. Aliran Tunak (*Steady Flow*)

Aliran tetap atau *steady flow*, yaitu aliran dimana kecepatan aliran tidak berubah menurut waktu. Pada aliran tetap berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady Flow*) Aliran tidak tetap atau *unsteady flow*, yaitu aliran dimana kecepatan aliran berubah menurut waktu. Pada aliran tidak tetap berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0 \quad (2.2)$$

2.4 Konveksi Panas

Konveksi panas merupakan proses perpindahan energi dari permukaan ke fluida karena perbedaan temperatur antara permukaan dan fluida. Konveksi panas pada umumnya dibagi menjadi dua jenis, yaitu:

2.4.1 Konveksi Bebas (*Free Convection*)

Konveksi bebas terjadi ketika sebuah benda ditempatkan dalam suatu fluida yang suhunya lebih tinggi atau lebih rendah daripada benda tersebut. Perbedaan suhu tersebut menyebabkan panas mengalir diantara fluida dan benda serta perubahan kerapatan (density) lapisan fluida di dekat permukaan. Perbedaan kerapatan menyebabkan fluida yang lebih berat mengalir ke bawah dan fluida yang lebih ringan mengalir ke atas. Gerakan fluida tersebut hanya disebabkan oleh perbedaan kerapatan, diakibatkan oleh gradien suhu. Dalam hal ini, suhu yang

lebih tinggi menyebabkan kerapatan semakin kecil, sehingga fluida akan mengalir ke atas yang disebabkan oleh gaya apung (buoyancy force), sedangkan suhu yang lebih kecil menyebabkan kerapatan semakin besar, sehingga fluida akan mengalir ke bawah yang disebabkan oleh gaya tarik gravitasi.

2.4.2 Konveksi paksa (*Forced Convection*)

Konveksi paksa merupakan konveksi yang terjadi pada saat fluida dipaksa mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal ataupun internal, sedangkan gaya apung diabaikan. Sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda solid seperti mengalir pada sebuah pipa sedangkan sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir di atas permukaan pelat datar. Konveksi panas menggambarkan perpindahan panas pada fluida yang dipengaruhi oleh gaya dari luar (Kasim, 2014). Konveksi paksa biasanya digunakan untuk meningkatkan laju perubahan panas.

2.4.3 Konveksi campuran (*Mixed Convection*)

Pada perkembangan perpindahan panas konveksi, dikenal konveksi campuran yang merupakan kombinasi antara aliran konveksi alamiah dan paksa. Konveksi campuran terjadi dimana pengaruh aliran gaya pada konveksi bebas dan konveksi paksa menjadi signifikan. Contoh konveksi campuran dalam kehidupan sehari-hari seperti pada tabung gas yang disebabkan oleh faktor eksternal yang terjadi dan pada saat bersamaan dengan asap yang berasal dari api.

2.5 Magnetohydrodynamics (MHD)

Magnetohydrodynamics (MHD) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik. Istilah *Magnetohydrodynamics* terdiri dari kata *magneto* yang berarti medan magnet, *hydro* yang berarti cairan atau fluida dan *dynamic* yang berarti pergerakan. *Magnetohydrodynamics* (MHD) dapat diartikan suatu pergerakan aliran fluida penghantar listrik dibawah pengaruh medan magnet. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. MHD diperkenalkan dan dikembangkan oleh Hannes Alfvén seorang fisikawan yang mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970. Konsep dasar MHD adalah medan magnet dapat menginduksi arus listrik pada fluida konduktif bergerak yang pada gilirannya menciptakan gaya pada fluida dan juga mengubah medan magnet itu sendiri. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan Navier-Stokes pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik. Persamaan diferensial MHD harus diselesaikan secara simultan, baik analitik maupun secara numerik.

Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida, yakni persamaan

kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi, dan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan dasar yang dibutuhkan untuk membuat bentuk ideal persamaan MHD:

Persamaan momentum:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

Persamaan konservasi energi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Persamaan Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.6)$$

dengan:

\mathbf{B} = medan magnet

\mathbf{E} = medan listrik

\mathbf{J} = kerapatan arus listrik

ρ = massa jenis

p = tekanan plasma

t = waktu

μ_0 = permeabilitas ruang hampa ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$)

Pada permasalahan MHD Persamaan (2.3) pada Persamaan Maxwell tidak berlaku sehingga dapat dihilangkan dan Persamaan (2.4) hanya digunakan pada kondisi awal (*initial condition*). Selain itu untuk frekuensi / kecepatan rendah perpindahan arus diabaikan (Arber, 2013). Sehingga persamaan umum MHD dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (2.11)$$

dan untuk mencari besar medan listrik, digunakan formulasi berikut:

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$$

jika $\eta = 0$ maka persamaan MHD tersebut dikatakan sebagai persamaan MHD ideal.

2.6 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan pada tahun 1904 oleh Ludwig Prandtl, seorang ahli aerodinamika Jerman. *Boundary layer* atau lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat dimana fluida mengalir. *Boundary layer* suatu fluida dipengaruhi oleh viskositas maupun gaya inersia benda tersebut.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran, yakni aliran laminar, aliran transisi dan aliran turbulen (Widodo, 2012).

Pada aliran laminar, partikel-partikel zat cair bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi apabila bilangan Reynolds kurang dari 500 ($Re < 500$) atau pada saat fluida bergerak dengan kecepatan kecil dan atau fluida memiliki viskositas (kekentalan) yang besar. Aliran transisi adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen. Terjadinya masa transisi antara aliran laminar dan turbulen karena adanya perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. aliran transisi terjadi apabila bilangan Reynolds antara 500 sampai 12.500 ($500 < Re < 12.500$). Sedangkan aliran turbulen terjadi pada saat partikel-partikel zat cair bergerak secara acak atau tidak teratur. Aliran turbulen terjadi apabila bilangan Reynolds lebih dari 12.500 ($Re > 12.500$).

Bilangan Reynolds untuk suatu aliran dapat dihitung menggunakan rumus

berikut:

$$Re = \frac{U_{\infty} l}{\nu} \quad (2.12)$$

dengan:

Re = bilangan Reynolds

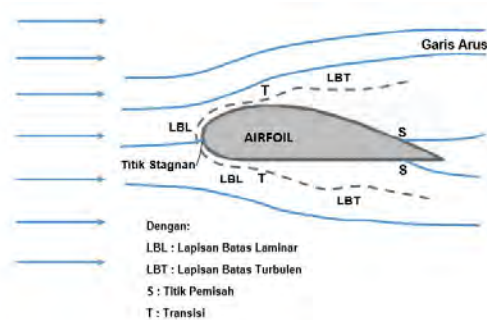
U_{∞} = kecepatan pada aliran bebas ($\frac{m}{s}$)

l = panjang karakteristik

ν = komponen kecepatan pada arah-y

Proses transfer yang berlangsung pada fluida dan benda padat adalah momentum masa dan perpindahan panas. Pada saat memformulasikan hukum kekekalan massa, momentum, dan energi, hukum termodinamik dan gas dinamik juga harus diperhatikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bersama dengan aliran boundary layer, ada juga *thermal boundary layer* dan pengaruh timbal balik dari lapisan-lapisan batas lain juga harus diperhitungkan. Teori mengenai lapisan batas digunakan pada berbagai ilmu teknik sains, seperti hidrodinamik, aerodinamik, *automobile* dan teknik kelautan.

Secara garis besar, contoh sederhana dari lapisan batas di fluida viskos dapat dijumpai di airfoil karena selama ini penelitian terhadap lapisan batas berkembang diawali dengan adanya minat para peneliti pada airfoil. Gambaran lapisan batas di sekitar airfoil dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5: Lapisan Batas di Sekitar Airfoil

2.7 Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Dalam matematika, metode beda hingga (FDM) adalah metode numerik untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial menggunakan persamaan beda hingga untuk mendekati derivatif. Metode beda hingga secara umum memiliki tiga pendekatan yaitu beda maju, beda pusat dan beda mundur. Berikut ini akan disajikan macam-macam metode beda hingga yaitu:

1. Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

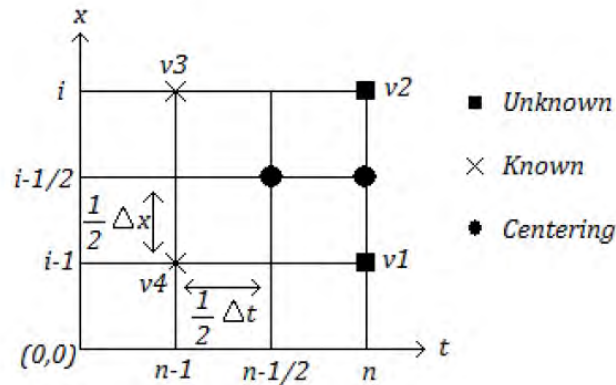
3. Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Dalam metode beda hingga, dikenal metode beda hingga eksplisit dan metode beda hingga implisit. Baik metode hingga eksplisit maupun metode beda hingga implisit memiliki keunggulannya masing masing dalam menentukan penyelesaian numerik persamaan diferensial. Namun, metode beda hingga implisit lebih unggul dalam kestabilan bila dibandingkan dengan metode beda hingga eksplisit.

2.7.1 Metode Keller Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik lebih efisien dan tepat. Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu (Mohammad, 2014).



Gambar 2.6: Stensil Skema Keller-Box

Berdasarkan bentuk skema Keller-Box pada Gambar 2.6 untuk menyelesaikan

persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}v_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(v_i + v_{i-1}) \\u^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(u^n + u^{n-1})\end{aligned}$$

Karena menggunakan titik-titik pada step size setengah maka secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}(\cdot)_i^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}[(\cdot)_i^n + (\cdot)_i^{n-1}] \\(\cdot)_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}[(\cdot)_i^n + (\cdot)_{i-1}^n]\end{aligned}$$

Sedangkan, skema beda hingga untuk turunan secara umum adalah :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\cdot)}{\partial v} &= \frac{(\cdot)_i - (\cdot)_{i-1}}{\Delta x} \\\frac{\partial(\cdot)}{\partial u} &= \frac{(\cdot)^n - (\cdot)^{n-1}}{\Delta t}\end{aligned}$$

BAB III

METODA PENELITIAN

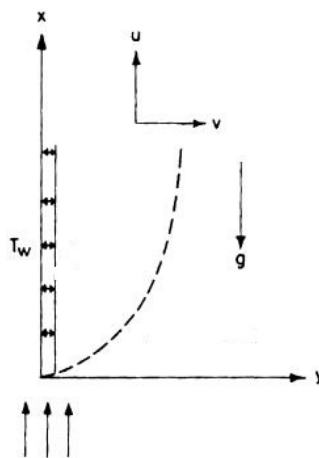
Bab ini menjelaskan tahapan dan tempat penelitian yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan aliran tak tunak konveksi campuran pada fluida kental MHD yang melewati pelat datar. Adapun tempat dan tahapan penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut.

3.1 Tahapan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang ada, penelitian ini terdiri atas tiga tahap yaitu :

3.1.1 Tahap Pembentukan Model

Permasalahan aliran fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran diilustrasikan pada Gambar 3.1 berikut ini:



Gambar 3.1: Model Fisik dan Sistem Koordinat dari Lapisan Batas Aliran Fluida Kental yang Melewati Sebuah Pelat Datar

Berdasarkan Gambar 3.1, aliran fluida dari permasalahan ini bergerak dari bawah ke atas melewati sebuah pelat datar yang diletakkan secara vertikal dalam keadaan diam yang terbenam pada fluida kental dengan kondisi tak tunak (*unsteady*) dan bersifat tak mampu mampat (*incompressible*). Gerakan fluida ini dipengaruhi oleh konveksi campuran dan adanya pengaruh medan magnet (*Magnetohydrodynamics*).

Penelitian ini mengasumsikan bahwa konstanta fluks panas dari pelat datar adalah konstan, temperatur dinding (T_w), kecepatan aliran bebas dan temperatur aliran fluida sebelum melewati pelat datar masing-masing adalah (U_∞) dan (T_∞).

Berdasarkan permasalahan tersebut di atas dan untuk menjawab perumusan masalah yang ada, maka dilakukan langkah - langkah analisa permasalahan sebagai berikut :

1. Membangun model matematika aliran fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran berdasarkan hukum konservasi massa, hukum Newton II dan hukum termodinamika.
2. Menentukan kondisi batas dari model matematika aliran fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran.
3. Mendapatkan model matematika yaitu persamaan kontinuitas, momentum dan energi dalam bentuk persamaan berdimensi.

3.1.2 Tahap Implementasi

Pada tahap ini, dilakukan implementasi metode Keller Box yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini. Persamaan yang didiskritisasi oleh metode ini adalah persamaan similaritas, dimana persamaan similaritas dari model ini didapatkan dengan melakukan beberapa tahapan berikut :

1. Persamaan pembangun berdimensi disederhanakan dan ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan tak berdimensi dengan menggunakan variabel tak berdimensi.
2. Persamaan tak berdimensi selanjutnya diubah menjadi persamaan similaritas dengan mensubstitusikan fungsi alir (*stream function*) dan variabel similaritas.

Implementasi metode Keller-Box dilakukan dengan terlebih dahulu mengubah ke dalam bentuk orde pertama yang kemudian dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga pusat.

3.1.3 Tahap Analisis Hasil

Pada tahap ini, akan dilakukan berbagai tahapan sebagai berikut :

1. Simulasi numerik dari persamaan pembangun diselesaikan dengan menggunakan MATLAB.

2. Dilakukan variasi pada parameter Magnetik (M), bilangan Prandtl (Pr) dan parameter konveksi (λ). Hal ini untuk mengetahui pengaruh parameter - parameter tersebut terhadap profil kecepatan dan temperatur.
3. Analisa hasil dari simulasi numerik yang dipengaruhi oleh parameter - parameter terhadap karakteristik fluida. Adapun parameter - parameter yang berhubungan dengan penelitian ini dapat dijabarkan sebagai berikut:

(a) Bilangan Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

(b) Parameter Konveksi

$$\lambda = \frac{g\beta l T_o}{U_\infty^2}$$

(c) Magnetik di fluida

$$M = \frac{\sigma B_0^2 l}{\rho U_\infty}$$

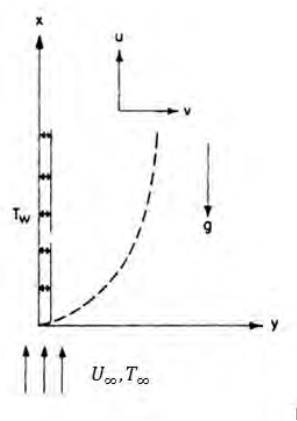
3.2 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

BAB IV

PEMBENTUKAN MODEL MATEMATIKA

Bab ini menjelaskan tentang model matematika fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran dalam bentuk model matematika berdimensi kemudian ditransformasikan ke dalam model matematika tak berdimensi dengan menggunakan variabel tak berdimensi. Selanjutnya model matematika tak berdimensi diubah menjadi persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir dan variabel similaritas yang sesuai. Model matematika aliran fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran dapat dibangun dengan penurunan hukum kekekalan massa, hukum II Newton dan hukum I Termodinamika. Kemudian dari penurunan ketiga persamaan tersebut berupa persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi yang disesuaikan dengan deskripsi geometri dari aliran fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran. Berikut ini deskripsi dari permasalahan aliran fluida kental yang melewati pelat datar diilustrasikan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Model Fisik dan Sistem Koordinat dari Lapisan Batas Aliran Fluida Kental yang Melewati Sebuah Pelat Datar

Gambar 4.1 mendeskripsikan bahwa arah aliran fluida dianggap mengalir dari bawah ke atas melewati pelat datar panas dalam keadaan diam yang terendam pada fluida kental yang bersifat *incompressible* dan tak tunak (*unsteady*). Gerakan fluida

ini disebabkan oleh bagian bawah fluida tersebut terkena panas secara alami dan secara paksa paksa kemudian fluida tersebut mengakibatkan perbedaan kerapatan sehingga menimbulkan *buoyancy forces* (gaya apung) dan gaya tekanan yang menjadi signifikan. Fenomena ini biasanya disebut konveksi campuran (*mixed convection*). Penelitian ini mengasumsikan bahwa konstanta fluks panas dari pelat datar adalah konstan, temperatur dinding (T_w), kecepatan aliran bebas dan temperatur di sekitar pelat datar masing-masing adalah (U_∞) dan (T_∞). Aliran konveksi campuran fluida kental MHD yang melewati permukaan pelat datar ini membentuk suatu lapisan batas dan dari lapisan batas tersebut yang akan dikonstruksi model matematika.

4.1 Persamaan Kontinuitas

Sesuai dengan hukum kekekalan massa yaitu laju perubahan massa terhadap waktu dari suatu sistem tertutup adalah konstan, maka secara matematis dapat ditulis :

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dimana massa sistem dinyatakan dengan

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho d\forall \quad (4.2)$$

dengan ρ adalah densitas fluida dan \forall merupakan volume fluida, dari Persamaan (4.1) dan (4.2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho d\forall = 0 \quad (4.3)$$

sehingga sesuai dengan transformasi sistem untuk volume atur atau biasa disebut teorema pengangkutan Reynolds, yaitu:

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho n d\forall + \int_{cs} \rho n \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0 \quad (4.4)$$

sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.4) ke dalam Persamaan (4.3) maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho d\forall + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (4.5)$$

dengan laju perubahan terhadap waktu dari massa kandungan volume atur yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \quad (4.6)$$

dan laju aliran netto dari massa melalui permukaan atur yaitu:

$$\int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (4.7)$$

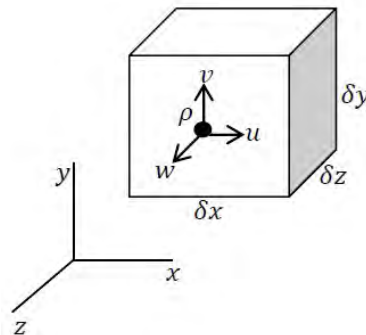
Keterangan bahwa integran $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ dalam integral laju aliran massa menyatakan perkalian dari komponen kecepatan \mathbf{V} yang tegak lurus terhadap suatu bagian kecil permukaan atur dan bidang diferensial dA . Jadi, $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ adalah laju dari aliran volume melalui dA dan $\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ adalah laju aliran massa melalui dA . Selanjutnya tanda dari perkalian titik $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ adalah ” + ” untuk aliran keluar dari volume atur dan ” - ” untuk aliran masuk volume atur karena $\hat{\mathbf{n}}$ dianggap positif apabila menunjuk keluar dari volume atur. Sehingga persamaan volume atur untuk kekekalan massa yang biasanya disebut persamaan kontinuitas dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0 \quad (4.8)$$

dengan:

$$\int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \sum \dot{m}_{keluar} - \sum \dot{m}_{masuk} \quad (4.9)$$

Misalkan volume atur yang digunakan berupa sebuah elemen kubus kecil dalam keadaan diam yang ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.2: Volume Atur

Pada pusat dari elemen tersebut, densitas fluida adalah ρ dan komponen kecepataannya adalah u , v , dan w . Karena elemen tersebut kecil, laju perubahan

terhadap waktu dari massa dari kandungan volume atur dapat dinyatakan sebagai:

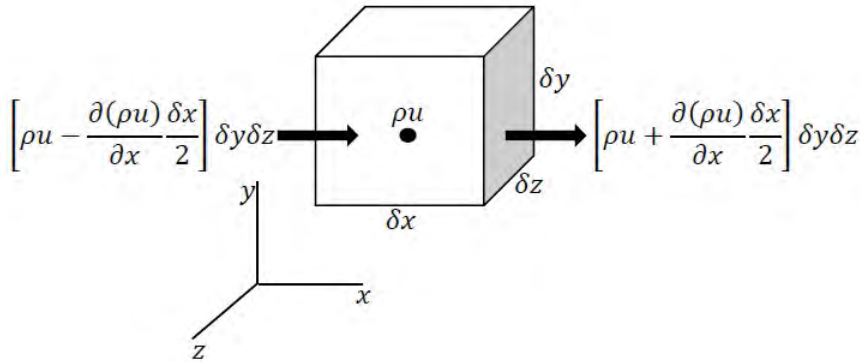
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4.10)$$

Selanjutnya untuk jumlah aliran massa pada permukaan elemen pada volume atur dapat diperoleh dengan meninjau aliran pada setiap koordinat secara terpisah. Sebagai contoh, pada Gambar 4.3 menggambarkan aliran dalam arah x . Jika ρu menyatakan komponen x dari laju aliran massa per satuan luas pada pusat elemen, maka pada permukaan kiri:

$$\rho u|_{x-\frac{\delta x}{2}} = \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.11)$$

dan permukaan kanan:

$$\rho u|_{x+\frac{\delta x}{2}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.12)$$



Gambar 4.3: Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur

Apabila kedua ruas dari Persamaan (4.11) dan Persamaan (4.12) di atas dikalikan dengan $\delta y \delta z$, maka laju dari massa yang melintasi sisi kanan dan kiri elemen tersebut dapat diperoleh seperti yang diilustrasikan pada Gambar 4.3. Apabila kedua persamaan ini digabung maka didapat jumlah aliran massa yang keluar dari elemen sebagai berikut:

$$\left[\left\{ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right\} \delta y \delta z \right] - \left[\left\{ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right\} \delta y \delta z \right] = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.13)$$

dengan cara yang sama diperoleh juga jumlah aliran massa keluar ke arah y yaitu:

$$\left[\left\{ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right\} \delta x \delta z \right] - \left[\left\{ \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right\} \delta x \delta z \right] = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.14)$$

dan ke arah z :

$$\left[\left\{ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right\} \delta x \delta y \right] - \left[\left\{ \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right\} \delta x \delta y \right] = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.15)$$

sehingga didapat jumlah aliran massa keluar = $\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$.
Jadi, laju terhadap perubahan waktu dari massa sistem yaitu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.16)$$

dengan membagi kedua ruas dengan $\delta x \delta y \delta z$ maka Persamaan (4.16) menjadi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = 0 \quad (4.17)$$

Persamaan (4.17) dapat ditulis dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut (Munson dkk, 2003):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (4.18)$$

karena aliran diasumsikan bersifat tak mampu-mapat (*incompressible*) dengan ρ konstan, maka Persamaan (4.18) menjadi:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.19)$$

Dalam bentuk skalar, Persamaan 4.19 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.20)$$

4.2 Persamaan Momentum

Berdasarkan hukum Newton II atau biasa disebut persamaan momentum, yaitu jumlah gaya yang bekerja pada sistem sama dengan besar momentum yang berubah pada sistem. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV \mathbf{V} = \sum F \quad (4.21)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk volume atur berikut ini:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \mathbf{V} + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \mathbf{V} = \sum F \quad (4.22)$$

dengan $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ bentuk skalar yang terjadi disetiap luasan dA . Bentuk integral permukaan atur menunjukkan flux momentum net yang melewati permukaan atur fluida yang masuk maupun keluar volume atur (Munson dkk, 2003).

Berdasarkan penurunan persamaan kontinuitas yang telah diperoleh sebelumnya, maka dengan analogi yang sama, persamaan kedua Newton dapat dinyatakan dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut:

$$\rho \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) \right] \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.23)$$

berdasarkan sifat divergensi bahwa:

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} (\nabla \cdot \mathbf{V})) \quad (4.24)$$

dan karena $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ Persamaan (4.19), maka Persamaan (4.23) menjadi:

$$\rho \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.25)$$

dengan $\sum F$ menunjukkan komponen gaya-gaya yang bekerja pada permukaan pelat datar. Komponen gaya-gaya tersebut yaitu, gaya tekan, gaya kental, dan gaya gravitasi yang diformulasikan sebagai:

$$\rho \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] \delta x \delta y \delta z = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{buo} + \mathbf{F}_{mhd} \quad (4.26)$$

dimana \mathbf{F}_s adalah gaya permukaan, \mathbf{F}_{buo} adalah gaya apung dan \mathbf{F}_{mhd} adalah gaya magnet. Karena yang diteliti pada arah sumbu x dan sumbu y maka persamaan (4.26) menjadi:

$$\rho \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] \delta x \delta y = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{buo} + \mathbf{F}_{mhd} \quad (4.27)$$

dengan \mathbf{F}_s dapat diuraikan sebagai berikut :

Resultan gaya pada arah x

$$\mathbf{F}_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (4.28)$$

Resultan gaya pada arah y

$$\mathbf{F}_{sy} = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (4.29)$$

Sehingga dapat dituliskan resultan gaya permukaan yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \mathbf{F}_{sx}\hat{i} + \mathbf{F}_{sy}\hat{j} \\ \mathbf{F}_s &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \hat{j} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Untuk fluida Newtonian tak mampu mampat, diketahui bahwa tegangan berbanding lurus terhadap laju deformasi dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tegangan normal

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.31)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.32)$$

Tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.33)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (4.31) - (4.33) pada Persamaan (4.30) didapatkan persamaan untuk gaya permukaan yaitu :

$$\mathbf{F}_s = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (4.34)$$

Substitusi Persamaan (4.29) pada Persamaan (4.34), maka didapat persamaan momentum baru yaitu :

$$\rho \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad (4.35)$$

dimana volume $\delta x \delta y$ saling meniadakan dan $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{buo} + \mathbf{F}_{mhd}$.

Pada persamaan momentum (4.35) terdapat bentuk komponen yang dinotasikan dalam notasi vektor, sehingga jika dijabarkan akan menjadi:

Ruas kiri pada Persamaan (4.35)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (u\hat{i} + v\hat{j}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial v}{\partial t}\hat{j}\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} &= \left((u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \right) \right) (u\hat{i} + v\hat{j}) \\ &= u\frac{\partial}{\partial x}(u\hat{i} + v\hat{j}) + v\frac{\partial}{\partial y}(u\hat{i} + v\hat{j}) \\ &= u\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + v\frac{\partial u}{\partial y}\hat{i} + u\frac{\partial v}{\partial x}\hat{j} + v\frac{\partial v}{\partial y}\hat{j}\end{aligned}\quad (4.37)$$

Ruas kanan pada Persamaan (4.35)

$$\begin{aligned}\nabla p &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \right) p \\ &= \frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j}\end{aligned}\quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}\mu \nabla^2 \mathbf{V} &= \mu \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \right) (u\hat{i} + v\hat{j}) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial xy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (u\hat{i} + v\hat{j}) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\hat{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\hat{j} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial xy}\hat{i} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial xy}\hat{j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\hat{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\hat{j} \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \hat{j}\end{aligned}\quad (4.39)$$

Dengan mengelompokkan vektor i untuk sumbu- x dan vektor j untuk sumbu- y , maka didapatkan persamaan momentum sumbu- x dan persamaan momentum sumbu- y sebagai berikut:

Persamaan Momentum Sumbu- x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \quad (4.40)$$

Persamaan Momentum Sumbu- y

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \quad (4.41)$$

4.2.1 Pengaruh Gaya Magnetik

Gaya yang bekerja pada fluida pada Persamaan (4.35) dapat ditulis $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$, dikarenakan pada penelitian ini dipengaruhi oleh gaya gravitasi dan gaya magnetik karena terdapat pengaruh MHD sehingga gaya pada fluida pada penelitian ini didefinisikan oleh

$$\mathbf{F} = \rho g + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.42)$$

dengan ρg adalah gaya gravitasi sedangkan $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ adalah gaya magnet. Gaya magnet sebagai pengaruh dari MHD dapat dituliskan persamaan yaitu:

$$\mathbf{F}_{mhd} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.43)$$

Menurut hukum Ohm, densitas arus listrik diberikan oleh:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (4.44)$$

$$\mathbf{B} = B_o + \mathbf{b} \quad (4.45)$$

dengan

\mathbf{J} = kerapatan arus listrik.

\mathbf{B} = gaya magnet.

σ = konduktivitas listrik fluida.

\mathbf{E} = medan listrik.

\mathbf{b} = medan induksi magnet.

B_o = vektor medan magnet = $(0, 0, B_o)$

Ketika bilangan Reynold yang diambil sangat kecil maka pengaruh medan listrik dan medan induksi magnet diabaikan, sehingga $\mathbf{E} \approx 0$, $\mathbf{b} \approx 0$. Berdasarkan pernyataan tersebut, maka Persamaan (4.44) menjadi:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (4.46)$$

Substitusikan (4.46) ke Persamaan (4.43), sehingga didapatkan persamaan berikut:

$$\mathbf{F}_{mhd} = \sigma (\mathbf{V} \times B_o) \times B_o \quad (4.47)$$

dengan:

$$(\mathbf{V} \times B_o) \times B_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & B_o \end{vmatrix} \times B_o \quad (4.48)$$

Jadi didapatkan gaya yang bekerja pada fluida adalah

$$\mathbf{F} = \rho g + \sigma(-uB_o^2, -vB_o^2, 0) \quad (4.49)$$

Secara umum gaya gravitasi didefinisikan oleh $g = (-g_x, -g_y, 0)$, nilai negatif pada g_x dan g_y karena aliran yang melewati pelat berlawanan dengan arah gravitasi (Siswono, 2015). Substitusi Persamaan (4.49) ke Persamaan (4.40) dan (4.41) sehingga persamaan momentum pada sumbu x dan sumbu y menjadi:

Persamaan Momentum Sumbu- x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho g_x - \sigma u B_o^2 \quad (4.50)$$

Persamaan Momentum Sumbu- y

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g_y - \sigma v B_o^2 \quad (4.51)$$

4.2.2 Pengaruh Aliran Konveksi

Pada permasalahan ini dengan adanya pengaruh aliran konvektif, maka tekanan p pada Persamaan momentum (4.50) dan (4.51) adalah kombinasi dari tekanan hidrostatik (p_h) dan tekanan dinamik (p_d). Sehingga tekanan p dapat ditulis sebagai berikut:

$$p = p_h + p_d \quad (4.52)$$

Tekanan hidrostatik (p_h) adalah tekanan yang berasal dari fluida di sekitar pelat datar dengan medan gravitasi diberikan sebagai berikut:

$$\nabla p_h = \rho_\infty g, \quad (4.53)$$

dengan ρ_∞ adalah densitas dari fluida di sekitar pelat datar (*ambient fluid*). Karena gaya gravitasi didefinisikan oleh $g = (-g_x, -g_y, 0)$, maka gradien dari tekanan adalah

$$\frac{\partial p_h}{\partial x} = -\rho_\infty g_x \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial y} = -\rho_\infty g_y \quad (4.55)$$

Sehingga turunan tekanan p pada Persamaan (4.52) terhadap sumbu- x dapat ditulis sebagai berikut:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p_d}{\partial x} - \frac{\partial p_h}{\partial x} = -\frac{\partial p_d}{\partial x} + \rho_\infty g_x \quad (4.56)$$

dan turunan tekanan p pada Persamaan (4.52) terhadap sumbu- y dapat ditulis sebagai berikut:

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p_d}{\partial y} - \frac{\partial p_h}{\partial y} = -\frac{\partial p_d}{\partial y} + \rho_\infty g_y \quad (4.57)$$

Substitusi Persamaan (4.56) ke persamaan momentum pada sumbu- x (4.50), sehingga persamaan momentum baru menjadi:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\rho_\infty - \rho)g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma u B_o^2 \quad (4.58)$$

Substitusi Persamaan (4.57) ke persamaan momentum pada sumbu- y (4.51), sehingga persamaan momentum baru menjadi:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + (\rho_\infty - \rho)g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \sigma v B_o^2 \quad (4.59)$$

4.3 Persamaan Energi

Selain persamaan kontinuitas dan persamaan momentum, pada penelitian ini juga digunakan persamaan energi. Pada penelitian ini, fluida mengalir dari bawah ke atas, gerakan fluida ini dipengaruhi oleh adanya konveksi campuran yakni panas yang timbul secara alami dan terdapat sumber panas lain yang menyebabkan adanya konveksi paksa. Sesuai dengan hukum pertama Termodinamika yaitu laju perubahan terhadap waktu dari energi yang tersimpan dari suatu sistem sama dengan jumlah dari laju netto dari pertambahan perpindahan energi dari kalor ke dalam sistem dengan laju netto dari pertambahan energi dari usaha yang dipin-

dahkan ke dalam sistem. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \left(\sum \dot{Q}_{out} - \sum \dot{Q}_{in} \right)_{sys} - \left(\sum \dot{W}_{out} - \sum \dot{W}_{in} \right)_{sys} \quad (4.60)$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \left(\dot{Q}_{innetto} - \dot{W}_{innetto} \right)_{sys} \quad (4.61)$$

karena volume kendali untuk hukum pertama termodinamika berimpit dengan sebuah sistem, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (4.62)$$

Berdasarkan Persamaan (4.60) sampai (4.62) didapat volume atur untuk hukum pertama Termodinamika sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \left(\dot{Q}_{innetto} - \dot{W}_{innetto} \right)_{cv} \quad (4.63)$$

karena pada penelitian ini benda dianggap diam maka $\dot{W} = 0$ (Khalimah, 2016) maka Persamaan (4.63) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \left(\dot{Q}_{innetto} \right)_{cv} \quad (4.64)$$

atau dalam bentuk volume atur

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} \nabla \cdot (e \rho \mathbf{V}) dV = \int_{cv} \nabla \cdot (k \nabla T) dV + \int_{cv} \dot{q} dV \quad (4.65)$$

dengan $\nabla \cdot (k \nabla T)$ adalah konduksi panas yang terjadi pada volume atur dan \dot{q} adalah sumber panas (*heat generation*) sehingga Persamaan (4.65) dapat ditulis sebagai berikut

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (4.66)$$

berdasarkan sifat divergensi diketahui bahwa

$$\nabla \cdot (e \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + e (\nabla \cdot \mathbf{V})$$

substitusikan persamaan kontinuitas yaitu Persamaan (4.19), sehingga didapat

$$\begin{aligned}\nabla \cdot e \mathbf{V} &= \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + 0 \\ &= \mathbf{V} \cdot (\nabla e)\end{aligned}$$

maka Persamaan (4.67) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla e) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (4.67)$$

Variasi tekanan pada aliran tidak cukup berpengaruh pada termodinamika. Diketahui bahwa hubungan antara spesifik energi internal, e , dengan spesifik entalpi \hat{h} yang merupakan energi potensial termodinamika dalam sistem, yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{h} = e + \frac{p}{\rho} \quad (4.68)$$

karena pengaruh dari tekanan fluida dan densitas diabaikan, maka perubahan energi dapat didekati dengan perubahan entalpi sebagai berikut:

$$\partial e = \partial \hat{h} - \partial \left(\frac{p}{\rho} \right) \approx \partial \hat{h} \quad (4.69)$$

Sehingga Persamaan (4.69) dapat ditulis:

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \hat{h}) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (4.70)$$

selanjutnya substitusikan $\partial \hat{h} \approx C_p \partial T$ ke Persamaan (4.70), sehingga didapat:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (4.71)$$

karena alirannya merupakan aliran konveksi tanpa *heat generation*, maka $\dot{q} = 0$ Persamaan (4.71) menjadi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4.72)$$

dengan penjabaran notasi vektor pada Persamaan (4.72) adalah sebagai berikut

Ruas Kiri pada Persamaan (4.72)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} \cdot (\nabla T) &= (u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
 &= \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
 &= \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

Ruas Kanan pada Persamaan (4.72)

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (k \nabla T) &\simeq k \nabla \cdot (\nabla T) \\
 &= k \nabla^2 T \\
 &= k \left[\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\
 &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

Maka Persamaan (4.72) menjadi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.73)$$

kemudian bagi kedua ruas dengan ρC_p , sehingga didapat:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.74)$$

karena $\frac{k}{\rho C_p} = \alpha$, maka pada kondisi *unsteady* Persamaan (4.74) menjadi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.75)$$

4.4 Pendekatan Boussinesq

Menurut pendekatan Boussinesq, semua variabel berpengaruh pada persamaan momentum diabaikan kecuali densitas. Pendekatan ini diterapkan pada persamaan momentum (4.58) dan (4.59), digunakan untuk mendekati perbedaan densitas yang disebabkan oleh adanya perbedaan temperatur karena pengaruh konveksi bebas yaitu gaya apung. Diasumsikan bahwa $(T - T_\infty)$ diasumsikan kecil dan sesuai dengan deret Taylor yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \quad (4.76)$$

dengan menghilangkan bagian yang berorde tinggi, maka persamaan (4.76) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty}{\rho} &= 1 + \beta(T - T_\infty) \\ \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} &= \beta(T - T_\infty) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Substitusi persamaan (4.77) ke dalam persamaan momentum sumbu- x (4.58) dan persamaan momentum sumbu- y (4.59), maka persamaan momentum menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho \beta (T - T_\infty) g_x - \sigma u B_o^2 \quad (4.78)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho \beta (T - T_\infty) g_y - \sigma v B_o^2 \quad (4.79)$$

4.5 Model Matematika Berdimensi

Berdasarkan persamaan momentum yang telah disederhanakan yaitu pada Persamaan (4.78) dan (4.79), persamaan kontinuitas (4.20) dan persamaan energi (4.75), maka model matematika berdimensi untuk aliran konveksi campuran pada fluida kental MHD yang melewati pelat datar adalah sebagai berikut :

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.80)$$

2. Persamaan Momentum Sumbu- x

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g - \sigma \bar{u} B_o^2 \quad (4.81)$$

3. Persamaan Momentum Sumbu- y

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g - \sigma \bar{v} B_o^2 \quad (4.82)$$

4. Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.83)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} t < 0 & : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y} \\ t \geq 0 & : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w(x) \text{ saat } \bar{y} = 0 \\ & \bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} = T_\infty \text{ saat } \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.84)$$

dengan tanda ”-” adalah simbol untuk model matematika berdimensi.

4.6 Model Matematika Tak Berdimensi

Model matematika berdimensi selanjutnya ditransformasikan ke dalam bentuk model matematika tak berdimensi. Hal ini dilakukan untuk menghilangkan dimensi dari parameter - parameter yang terdapat pada model matematika berdimensi. Selanjutnya diberikan bentuk transformasi variabel - variabel tak berdimensi yang diberikan sebagai berikut (Mohammad, 2014) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{l} ; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{l} \\ u &= \frac{\bar{u}}{U_\infty} ; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_\infty} \\ t &= \frac{U_\infty \bar{t}}{l} ; p = \frac{\bar{p}}{p U_\infty^2} \\ T &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w(x) - T_\infty} \end{aligned} \quad (4.85)$$

dengan $Re = \frac{U_\infty l}{\nu}$ dan ν adalah viskositas kinematik yang dapat dituliskan $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ sedangkan variabel temperatur pada pelat T_w diasumsikan $T_w(x) = T_\infty + T_o x$ dengan T_o adalah karakteristik kecepatan fluida dan bernilai konstan. Selanjutnya dilakukan substitusi variabel - variabel tak berdimensi (4.85) pada Persamaan (4.80) - (4.83) sehingga didapatkan model matematika tak berdimensi sebagai berikut :

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.86)$$

2. Persamaan Momentum Sumbu-x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + \lambda T x \quad (4.87)$$

3. Persamaan Momentum Sumbu- y

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{M}{Re} v + \frac{1}{Re^{1/2}} \lambda T x \quad (4.88)$$

4. Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.89)$$

dengan M, λ, Pr adalah parameter tak berdimensi, parameter - parameter tersebut didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma B_o^2 l}{\rho U_\infty} & (\text{Parameter Magnetik}) \\ \lambda &= \frac{g \beta l T_o}{U_\infty^2} & (\text{Parameter Konveksi}) \\ Pr &= \frac{\nu}{\alpha} & (\text{Bilangan Prandtl}) \end{aligned} \quad (4.90)$$

maka kondisi batas pada (4.84) menjadi:

$$\begin{aligned} t < 0 & : u = v = 0, T = 0 \text{ untuk setiap } x, y \\ t \geq 0 & : u = v = 0, T = 1 \text{ saat } y = 0 \\ & u = u_e(x), T = 0 \text{ saat } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.91)$$

4.7 Pendekatan Lapisan Batas

Dengan menggunakan pendekatan lapisan batas dimana $Re \rightarrow \infty$ dan mengakibatkan $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ sehingga persamaan yang baru menjadi :

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.92)$$

2. Persamaan Momentum Sumbu- x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + \lambda T x \quad (4.93)$$

3. Persamaan Momentum Sumbu- y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.94)$$

4. Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.95)$$

Pada Persamaan (4.94) dapat dilihat bahwa tekanan fluida, p tidak bergantung pada y sehingga untuk menyelesaikan aliran dua dimensi, tekanan pada aliran p hanya bergantung pada x . Jadi hanya terdapat satu persamaan momentum pada persamaan pembangun yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + \lambda T x \quad (4.96)$$

sehingga persamaan momentum di luar lapisan batas yaitu

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - Mu_e + \lambda T x \quad (4.97)$$

Pada kasus aliran fluida yang melewati pelat datar, u_e yaitu kecepatan di luar aliran lapisan batas diasumsikan $u_e = x$ (Pop, 2001). Sehingga didapatkan bahwa

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.98)$$

substitusi Persamaan (4.98) pada Persamaan (4.97) didapatkan

$$u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x} - Mu_e + \lambda T x$$

pada saat $T = 0$ maka

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{du_e}{dx} + Mu_e \quad (4.99)$$

dengan menyubstitusikan Persamaan (4.99) pada Persamaan (4.96) didapatkan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M(u - u_e) + \lambda T x \quad (4.100)$$

4.8 Fungsi Alir (*Stream Function*)

Aliran yang digunakan menggunakan penampang dua dimensi dan terdapat dua komponen u dan v yang alirannya berada pada bidang x dan y . Untuk menyederhanakan banyaknya persamaan yang ada dan membuat komputasi hanya dalam satu variabel. Fungsi alir ini dinyatakan sebagai berikut :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.101)$$

1. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

2. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M(u - u_e) + \lambda T x \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - M \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \lambda T x \end{aligned} \quad (4.103)$$

3. Persamaan Energi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4.104)$$

4.8.1 Persamaan Similaritas

Fungsi alir memenuhi persamaan kontinuitas, yang dapat dilihat pada Persamaan (4.102), sehingga persamaan pembangun yang digunakan yaitu persamaan momentum dan persamaan energi. Persamaan untuk variabel

similaritas untuk waktu kecil ($t \leq t^*$) dengan t^* sebarang nilai yaitu

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) f(\eta, t), \quad T = \theta(\eta, t), \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}} \quad (4.105)$$

Substitusi Persamaan (4.105) pada Persamaan (4.103) dan (4.104), sehingga didapatkan persamaan similaritas untuk waktu kecil (*small time*) sebagai berikut

Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + \frac{\lambda \theta t x}{u_e} \end{aligned} \quad (4.106)$$

Persamaan Energi

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + Pr t f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - Pr u_e t \frac{\theta}{x} \frac{\partial f}{\partial \eta} = Pr t \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.107)$$

Variabel similaritas untuk waktu besar ($t \geq t^*$) yaitu

$$\psi = u_e(x) F(Y, t), \quad T = S(Y, t), \quad Y = y \quad (4.108)$$

Substitusi Persamaan (4.108) pada Persamaan (4.103) dan (4.104), sehingga didapatkan persamaan similaritas untuk waktu besar (*large time*) sebagai berikut

Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + \frac{\lambda S x}{u_e} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Persamaan Energi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr F \frac{\partial S}{\partial Y} - Pr u_e \frac{S}{x} \frac{\partial F}{\partial Y} = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.110)$$

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa $u_e = x$ sehingga untuk $\frac{du_e}{dx} = 1$, berdasarkan hal tersebut maka model matematika similar dari aliran fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran adalah

1. Pada saat *small time*, ($t < t^*$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + \lambda \theta t \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + Prt f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - Prt \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} = Prt \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.112)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \theta = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta \\ t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \theta = 1 \text{ saat } \eta = 0 \\ f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, \theta = 0 \text{ saat } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.113)$$

2. Pada saat *large time*, ($t > t^*$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + \lambda S \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr F \frac{\partial S}{\partial Y} - Pr S \frac{\partial F}{\partial Y} = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.115)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ saat } Y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ saat } Y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.116)$$

Persamaan (4.111) dan (4.112) dapat ditulis dalam bentuk

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' + t(1 - (f')^2) + ff'' - Mt(f' - 1) + \lambda\theta t = t \frac{\partial f'}{\partial t} \quad (4.117)$$

$$\theta'' + Pr \frac{\eta}{2}\theta' + Prt f\theta' - Prt \theta f' = Prt \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.118)$$

Kondisi awal untuk fungsi f, f', f'' dan θ, θ' didapatkan dengan menyubstitusikan $t = 0$ pada Persamaan (4.111) dan (4.112) yang diselesaikan dengan kondisi batas (4.113) diperoleh

$$\begin{aligned} f &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) - 1 \right\} \\ f' &= \operatorname{erf}\frac{\eta}{2} \\ f'' &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{4}} \\ \theta &= -\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Pr}}{2}\eta\right) + 1 \\ \theta' &= -\sqrt{\frac{Pr}{\pi}} \exp\left\{-\frac{Pr}{4}\eta^2\right\} \end{aligned} \quad (4.119)$$

dan kondisi batas (4.113) dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} f(0, t) &= f'(0, t) = 0, \theta(0, t) = 1 \\ f' &= 1, \theta = 0 \text{ untuk } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.120)$$

BAB V

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Bab ini menjelaskan penyelesaian model matematika aliran tak tunak fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran menggunakan skema Keller-Box. Penyelesaian secara numerik ini diawali dengan metode Keller-Box dengan mendiskritkan model matematika aliran tak tunak fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran yang telah didapatkan sebelumnya, kemudian dilakukan linierisasi Metode Newton yang selanjutnya diselesaikan dengan teknik eliminasi matrik blok tridiagonal dan disimulasikan dengan program. Simulasi numerik yang telah dibuat menghasilkan grafik pengaruh dari parameter magnetik, bilangan Prandtl dan parameter konveksi terhadap profil kecepatan dan profil temperatur yang selanjutnya dianalisa.

5.1 Penyelesaian Numerik Model

Pada penelitian ini, model persamaan yang didapatkan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Keller-Box. Metode ini sesuai dan efisien untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang berbentuk diferensial parsial parabolik. Tahapan-tahapan dalam penyelesaian numerik ini yaitu :

1. Persamaan model sistem (4.117) dan (4.118) dibentuk menjadi persamaan orde pertama.
2. Dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga pusat.
3. Dilakukan linierisasi persamaan yang didapat dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor.
4. Hasil linierisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

5.1.1 Diskritisasi Model

Persamaan merupakan persamaan dengan orde tinggi. Penyelesaian dengan metode Keller-Box menggunakan persamaan dalam bentuk orde pertama, maka dilakukan pemisalan fungsi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
f' &= u \\
u' &= v \\
\theta' &= q
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$v' + \frac{\eta}{2}v + t(1 - (u^2) + fv) + Mt(1 - u) + \lambda\theta t = t \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.2}$$

$$q' + Pr \frac{\eta}{2}q + Prt fq - Prt \theta u = Prt \frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{5.3}$$

Setelah dilakukan pemisalan fungsi selanjutnya dilakukan diskritisasi model dengan menggunakan metode beda hingga, untuk Persamaan (5.1) menggunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ dengan menggunakan beda hingga pusat, sedangkan untuk bentuk tak linier pada Persamaan (5.2) dan (5.3) digunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$ dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{\ell_j} &= u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{\ell_j} &= \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{2}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\ell_j} &= v_{j-\frac{1}{2}}^n \\
\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\ell_j} &= \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{2}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(\theta_j^n - \theta_{j-1}^n)}{\ell_j} &= q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
\frac{(\theta_j^n - \theta_{j-1}^n)}{\ell_j} &= \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{2}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{\ell_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \\
&+ Mt^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \lambda t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} \\
&- \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) \\
&- Mt^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \lambda t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{\ell_j} + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - Pr t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& - Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Pr t^{n-1} \theta_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

dengan l_j adalah step size untuk η , sedangkan k^n step size dari t , dimana :

$$\begin{aligned}
(\cdot)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} [(\cdot)_j^n + (\cdot)_{j-1}^n] \\
(\cdot)_j^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} [(\cdot)_j^n + (\cdot)_j^{n-1}]
\end{aligned}$$

5.1.2 Linierisasi Model

Model matematika yang telah didiskritisasi kemudian dilakukan linierisasi dengan menggunakan metode Newton. Sebelumnya dikenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut

$$\begin{aligned}
f_j^{i+1} &= f_j^i + \delta f_j^i \\
u_j^{i+1} &= u_j^i + \delta u_j^i \\
v_j^{i+1} &= v_j^i + \delta v_j^i \\
\theta_j^{i+1} &= \theta_j^i + \delta \theta_j^i \\
q_j^{i+1} &= q_j^i + \delta q_j^i \quad (5.9)
\end{aligned}$$

selanjutnya disubstitusikan bentuk iterasi pada sistem persamaan, secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada $(\delta f_j^i, \delta u_j^i, \delta v_j^i, \delta \theta_j^i, \delta q_j^i)$ didapatkan :

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.10)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.11)$$

$$(\delta \theta_j - \delta \theta_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta q_j + \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_j \delta f_j + (a_2)_j \delta f_{j-1} + (a_3)_j \delta u_j + (a_4)_j \delta u_{j-1} + (a_5)_j \delta v_j \\
& + (a_6)_j \delta v_{j-1} + (a_7)_j \delta \theta_j + (a_8)_j \delta \theta_{j-1} = (r_4)_j \quad (5.13)
\end{aligned}$$

$$(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta \theta_j + (b_6)_j \delta \theta_{j-1} + (b_7)_j \delta u_j + (b_8)_j \delta u_{j-1} = (r_5)_j \quad (5.14)$$

dengan

$$\begin{aligned} (r_1)_j &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) \\ (r_2)_j &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) \\ (r_3)_j &= -(\theta_j^n - \theta_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n + q_{j-1}^n) \\ (r_4)_j &= -\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{\ell_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2\right) - f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \Big) - \\ &\quad Mt^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \lambda t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \\ &\quad t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2\right) + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \Big) - Mt^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ (r_5)_j &= -\frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{\ell_j} - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n - Pr t^n (fq)_{j-\frac{1}{2}}^n + Pr t^n (\theta u)_{j-\frac{1}{2}}^n + \\ &\quad 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \\ &\quad Pr t^{n-1} (fq)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Pr t^{n-1} (\theta u)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ (a_1)_j &= \frac{t^n}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ (a_2)_j &= (a_1)_j \\ (a_3)_j &= -t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{Mt^n}{2} - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\ (a_4)_j &= (a_3)_j \\ (a_5)_j &= \frac{1}{\ell_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{t^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (a_6)_j &= -\frac{1}{\ell_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{t^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (a_7)_j &= \frac{\lambda t^n}{2} \\ (a_8)_j &= (a_7)_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b_1)_j &= \frac{1}{\ell_j} + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + Pr \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_2)_j &= -\frac{1}{\ell_j} + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + Pr \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_3)_j &= Pr \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= Pr \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j \\
(b_7)_j &= -Pr \frac{t^n}{2} \theta_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_8)_j &= (b_7)_j
\end{aligned}$$

5.1.3 Teknik Eliminasi Blok

Sistem linier pada persamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok (Mohammad, 2014). Struktur tridiagonal blok biasanya terdiri dari elemen-elemen yang berupa variabel atau konstanta, sedangkan pada metode Keller Box ini elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier persamaan dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat $j = 1$, $j = N - 1$ dan $j = N$.

Keadaan 1 Saat $j = 1$, maka persamaan menjadi

$$\begin{aligned}
(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_1}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) &= (r_1)_1 \\
(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_1}{2}(\delta v_1 + \delta v_0) &= (r_2)_1 \\
(\delta \theta_1 - \delta \theta_0) - \frac{l_1}{2}(\delta q_1 + \delta q_0) &= (r_2)_1 \\
(a_1)_1 \delta f_1 + (a_2)_1 \delta f_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_4)_1 \delta u_0 + (a_5)_1 \delta v_1 \\
&+ (a_6)_1 \delta v_0 + (a_7)_1 \delta \theta_1 + (a_8)_1 \delta \theta_0 = (r_4)_1 \\
(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta \theta_1 \\
&+ (b_6)_1 \delta \theta_0 + (b_7)_1 \delta u_1 + (b_8)_1 \delta u_0 = (r_5)_1
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta \theta_0 = 0$ maka sistem di atas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\ell_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\ell_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\ell_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\ell_1}{2} \\ (a_6)_1 & 0 & (a_1)_1 & (a_5)_1 & 0 \\ 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\ell_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_1 & (a_7)_1 & 0 & 0 & 0 \\ (b_7)_1 & (b_5)_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta \theta_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \\ \delta q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{pmatrix}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk $j = 1$ yaitu $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$.

Keadaan 2 Saat $j = N - 1$, maka persamaan menjadi

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta u_{N-1} + \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1}$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta v_{N-1} + \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1}$$

$$(\delta \theta_{N-1} - \delta \theta_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta q_{N-1} + \delta q_{N-2}) = (r_3)_{N-1}$$

$$(a_1)_{N-1}\delta f_{N-1} + (a_2)_{N-1}\delta f_{N-1} + (a_3)_{N-1}\delta u_{N-1} + (a_4)_{N-1}\delta u_{N-1} + (a_5)_{N-1}\delta v_{N-1} \\ + (a_6)_{N-1}\delta v_{N-2} + (a_7)_{N-1}\delta \theta_{N-1} + (a_8)_{N-1}\delta \theta_{N-2} = (r_4)_{N-1}$$

$$(b_1)_{N-1}\delta q_{N-1} + (b_2)_{N-1}\delta q_{N-2} + (b_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + (b_5)_{N-1}\delta \theta_{N-1} \\ + (b_6)_{N-1}\delta \theta_{N-2} + (b_7)_{N-1}\delta u_{N-1} + (b_8)_{N-1}\delta u_{N-2} = (r_5)_{N-1}$$

sistem di atas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_{N-1} & (a_6)_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & 0 & (b_2)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_4)_{N-1} & (a_8)_{N-1} & (a_1)_{N-1} & (a_5)_{N-1} & 0 \\ (b_8)_{N-1} & (b_6)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & 0 & (b_1)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta \theta_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_{N-1} & (a_7)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \\ (b_7)_{N-1} & (b_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta \theta_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{pmatrix}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk $j = 2, 3, \dots, N_1$.

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

Keadaan 3 Saat $j = N$, maka persamaan menjadi

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta u_N + \delta u_{N-1}) = (r_1)_N$$

$$(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta v_N + \delta v_{N-1}) = (r_2)_N$$

$$(\delta \theta_N - \delta \theta_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta q_N + \delta q_{N-1}) = (r_3)_N$$

$$(a_1)_N \delta f_N + (a_2)_N \delta f_{N-1} + (a_3)_N \delta u_N + (a_4)_N \delta u_{N-1} + (a_5)_N \delta v_N \\ + (a_6)_N \delta v_{N-1} + (a_7)_N \delta \theta_N + (a_8)_N \delta \theta_{N-1} = (r_4)_N$$

$$(b_1)_N \delta q_N + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N + (b_4)_N \delta f_{N-1} + (b_5)_N \delta \theta_N \\ + (b_6)_N \delta \theta_{N-1} + (b_7)_N \delta u_N + (b_8)_N \delta u_{N-1} = (r_5)_N$$

sistem di atas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_1)_N & (a_6)_N & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_N & 0 & (b_2)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_4)_N & (a_8)_N & (a_1)_N & (a_5)_N & 0 \\ (b_8)_N & (b_6)_N & (b_3)_N & 0 & (b_1)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta \theta_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{pmatrix}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk $j = N$.

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$$

Dengan demikian secara keseluruhan untuk $j = 1, 2, 3, \dots, N$ secara sederhana dapat dituliskan

$$\begin{aligned} j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\ j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\ j = 3 & : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\ & \vdots \\ j = N-1 & : [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}] \\ j = N & : [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N] \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai :

$$\mathbf{A}\delta = \mathbf{r} \quad (5.15)$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & & [B_N] & [A_N] \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Persamaan (5.15), dapat dilihat bahwa matriks \mathbf{A} adalah matriks tridiagonal yang elemen-elemennya bernilai nol kecuali pada tiga diagonal utamanya. Persamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok dengan mengasumsikan bahwa matriks \mathbf{A} adalah matriks *non singular* sehingga dapat dilakukan sebagai

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (5.16)$$

dimana

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_1] & & & \\ & & \vdots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [\alpha_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & & & [I] \end{pmatrix}$$

dengan $[I]$ adalah matriks identitas yang berukuran 5×5 dan $[\alpha_j], [\Gamma_j]$ merupakan matriks ukuran 5×5 dengan elemen-elemennya ditentukan dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [A_1][\Gamma_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, N \\ [\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

dengan menyubstitusikan Persamaan (5.16) pada Persamaan (5.15) maka didapatkan persamaan

$$\mathbf{LU}\delta = \mathbf{r} \quad (5.17)$$

dengan mendefinisikan bahwa

$$\mathbf{U}\delta = \mathbf{W} \quad (5.18)$$

sehingga Persamaan (5.17) dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{LW} = \mathbf{r} \quad (5.19)$$

dengan

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{pmatrix}$$

dan $[W_j]$ adalah matriks berukuran 5×1 dengan elemen-elemennya didapatkan dari Persamaan (5.19) yaitu

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [r_j] - [B_j][W_j], \quad 2 \leq j \leq N \end{aligned}$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks \mathbf{W} , maka selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari δ pada Persamaan (5.18) dengan menggunakan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\delta_j] &= [r_1] \\ [\delta_j] &= [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N - 1 \end{aligned}$$

dengan didapatkannya nilai δ , maka Persamaan (5.10) - (5.13) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan (5.9) dengan melakukan iterasi sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw kriteria konvergen menggunakan $v(0, t)$ dan iterasi berhenti saat didapatkan $|\delta v(0, t)| < \epsilon$, dimana nilai ϵ sangat kecil. Pada penelitian ini digunakan nilai $\epsilon = 10^{-5}$ (Mohammad, 2014).

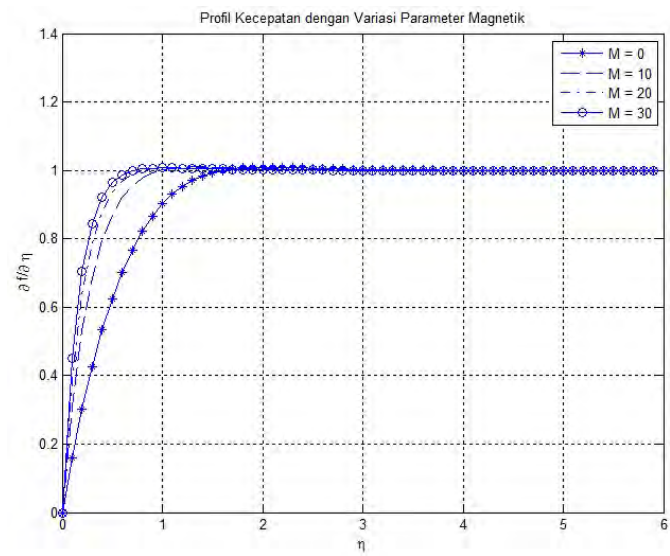
5.2 Hasil Simulasi dan Pembahasan

Setelah dilakukan tahapan penyelesaian numerik maka dilakukan simulasi dengan menggunakan Matlab. Pada simulasi ini dilakukan percobaan variasi dari beberapa parameter yang ada dan yang ditampilkan pada bab ini beberapa yang mewakili dari percobaan simulasi yang dilakukan. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, diperoleh hubungan antara parameter magnetik (M), bilangan Prandtl (Pr) dan parameter konveksi (λ) terhadap profil kecepatan (f') dan profil temperatur (θ). Simulasi ini menggunakan partisi η sebanyak 60 dengan $\Delta\eta = \ell_j = 0.1$ dan partisi t sebanyak 33 dengan $\Delta t = k^n = 0.05$. Uraian dari masing-masing pengaruh parameter tersebut adalah sebagai berikut :

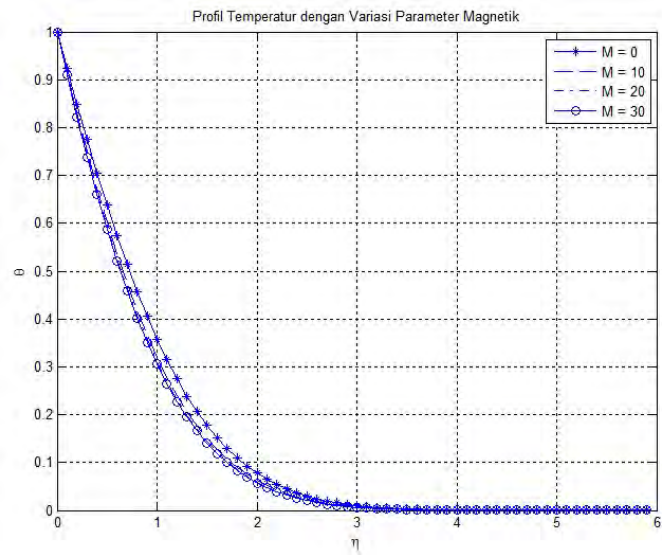
5.2.1 Pengaruh Parameter Magnetik (M)

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh dari parameter magnetik terhadap kecepatan dan temperatur pada fluida kental. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter Magnetik $M = 0, 10, 20, 30$ dengan menggunakan parameter tetap $\lambda = 1, Pr = 0.7$ dengan $t = 1.65$, pemilihan variasi parameter Magnetik dapat dilakukan untuk nilai $0 \leq M \leq 100$ dimana $M = 0$ yang berarti tidak ada pengaruh medan magnet pada aliran.

Pada Gambar 5.1 menunjukkan grafik pengaruh parameter magnetik terhadap



Gambar 5.1: Profil Kecepatan Variasi Parameter Magnetik



Gambar 5.2: Profil Temperatur Variasi Parameter Magnetik

profil kecepatan. Pada grafik terlihat bahwa semakin besar nilai parameter magnetik maka semakin besar pula kecepatan aliran fluida. Hal ini terjadi karena besar gaya Lorentz yang bekerja semakin besar seiring dengan bertambahnya besar medan magnet yang mempengaruhi fluida kental. Peningkatan besar gaya Lorentz mengakibatkan gerakan dari muatan - muatan listrik meningkat didalam suatu medan magnet. Sehingga dipahami bahwa semakin cepatnya gerakan muatan listrik yang terkandung di medan magnet menyebabkan semakin meningkatnya kecepatan dari fluida.

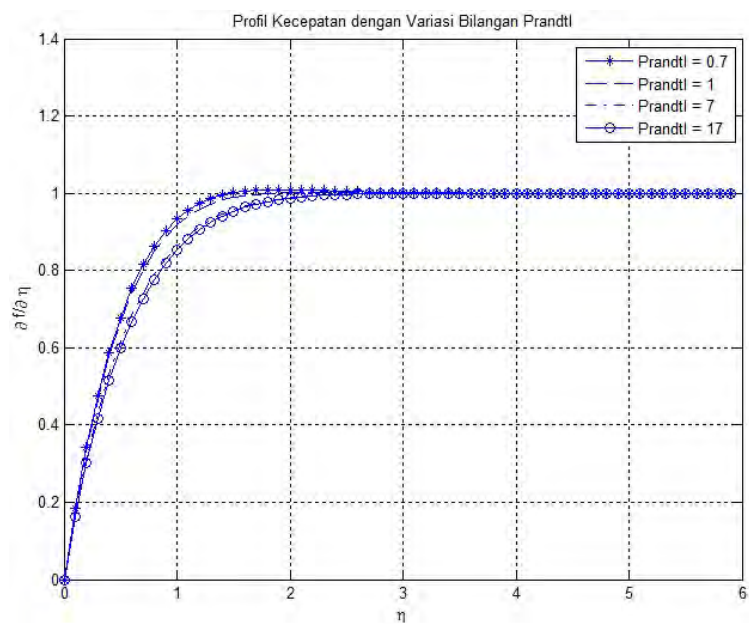
Untuk grafik pengaruh parameter magnetik terhadap profil temperatur dapat dilihat pada Gambar 5.2. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin besar nilai parameter magnetik maka temperatur fluida semakin turun. Gaya Lorentz yang disebabkan oleh adanya medan magnet yang melintang pada aliran membuat fluida ini semakin bertambah energi internalnya. Energi internal digunakan untuk partikel fluida bergerak melaju sesuai dengan *streamline*, sehingga temperatur fluida ini akan semakin berkurang seiring bertambahnya medan magnet.

5.2.2 Pengaruh Bilangan Prandtl (Pr)

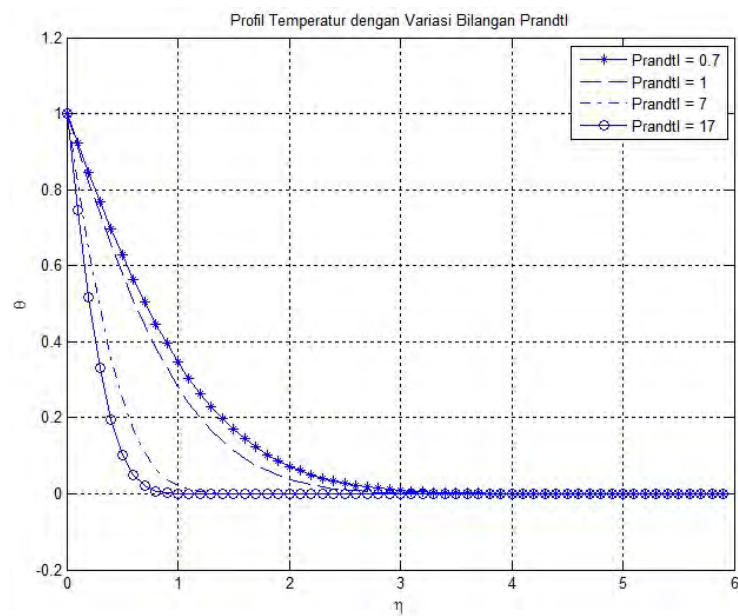
Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh dari bilangan Prandtl terhadap kecepatan dan temperatur pada fluida kental. Pada simulasi ini digunakan variasi bilangan Prandtl yaitu $Pr = 0.7, 1, 7, 17$ dengan menggunakan parameter tetap $\lambda = 1, M = 1$ dengan $t = 1.65$. Pemilihan variasi bilangan Prandtl dapat dilakukan untuk nilai $0.7 \leq Pr \leq 100$ dimana $Pr = 0.7$ yang berarti gas dan $Pr = 7$ yang berarti air.

Pada Gambar 5.3 dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya bilangan Prandtl maka menyebabkan profil kecepatan fluida menurun. Grafik yang dihasilkan pada kasus ini menunjukkan hal yang sama dengan definisi bilangan Prandtl. Hal ini disebabkan karena semakin meningkatnya bilangan Prandtl maka densitas fluida semakin besar sehingga mengakibatkan profil kecepatan menurun.

Sedangkan pada Gambar 5.4 dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya bilangan Prandtl maka semakin menurun temperatur fluida yang dihasilkan. Hal ini disebabkan karena semakin meningkatnya bilangan Prandtl maka diffusivitas panas semakin kecil. Diffusivitas panas yang semakin menurun ini yang menyebabkan temperatur fluida juga menurun seiring meningkatnya bilangan Prandtl karena panas akan didifusikan dari permukaan benda lebih cepat dibandingkan dengan fluida.



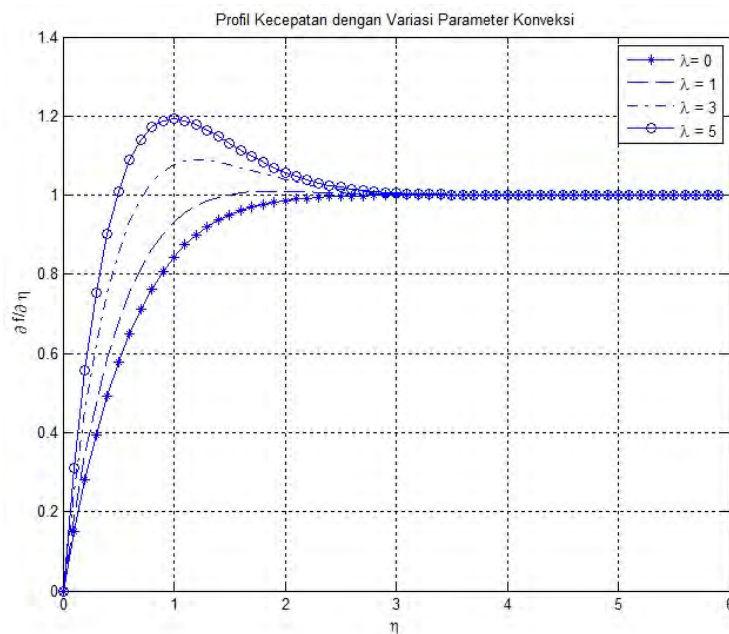
Gambar 5.3: Profil Kecepatan Variasi bilangan Prandtl



Gambar 5.4: Profil Temperatur Variasi bilangan Prandtl

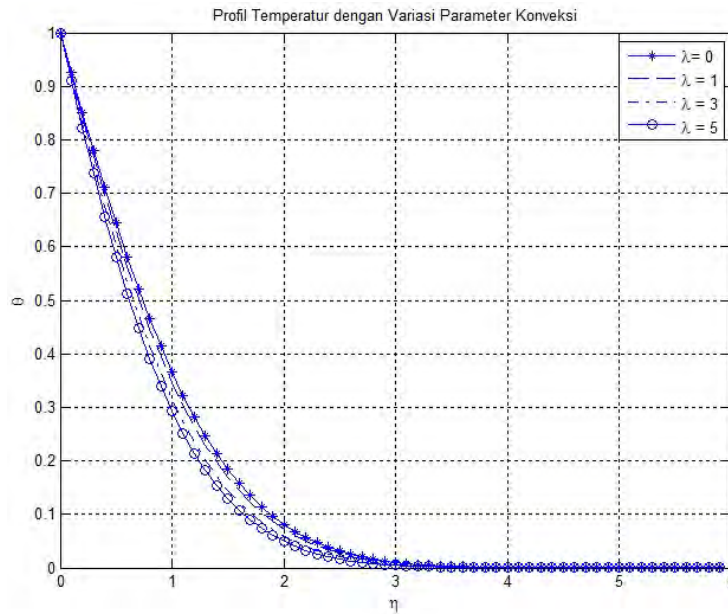
5.2.3 Pengaruh Parameter Konveksi (λ)

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh dari parameter konveksi terhadap kecepatan dan temperatur pada fluida kental. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter konveksi $\lambda = 0, 1, 3, 5$ dengan menggunakan parameter tetap $Pr = 0.7, M = 10$ dengan $t = 1.65$. Pada penelitian ini digunakan variasi parameter konveksi dengan dapat dilakukan untuk nilai $0 \leq \lambda \leq 10$ dimana $\lambda > 0$ yang berarti konveksi campuran yaitu dengan adanya pengaruh gaya apung sedangkan untuk $\lambda = 0$ yang berarti konveksi tersebut termasuk jenis konveksi paksa (Pop dan Ingham, 2001).



Gambar 5.5: Profil Kecepatan Variasi Parameter Konveksi

Pada Gambar 5.5 dapat dilihat bahwa semakin besar nilai parameter konveksi maka semakin besar kecepatan fluidanya. Hal ini terjadi karena dengan adanya peningkatan nilai parameter konveksi maka semakin meningkat pula gaya apung yang bekerja pada fluida sehingga kecepatan fluida akan meningkat. Sedangkan pada Gambar 5.6 didapatkan bahwa temperatur fluida semakin menurun seiring dengan bertambahnya parameter konveksi. Hal ini disebabkan karena $\lambda = \frac{g\beta LT_o}{U_\infty^2}$. Oleh karena itu terjadinya penurunan temperatur ini dapat dikarenakan oleh T_o yang semakin besar dengan temperatur dinding yang konstan sehingga menyebabkan temperatur fluida menurun dengan adanya peningkatan parameter konveksi.



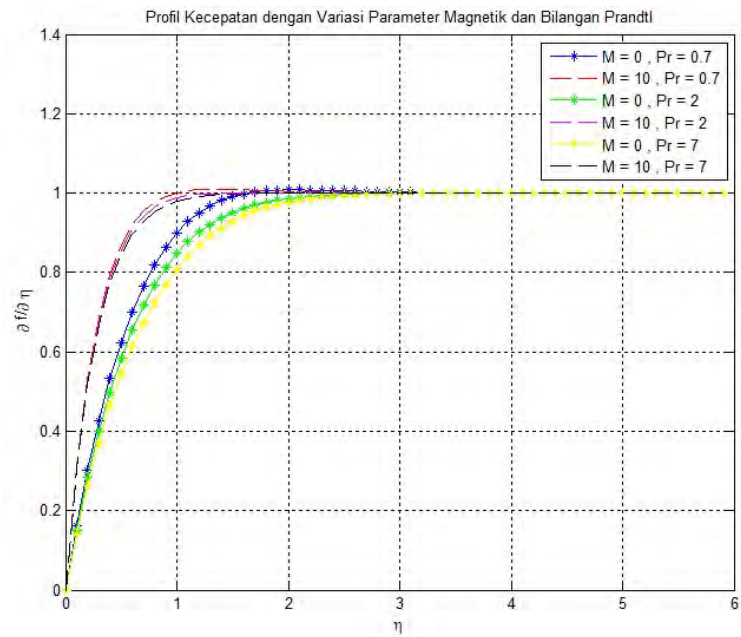
Gambar 5.6: Profil Temperatur Variasi Parameter Konveksi

5.2.4 Pengaruh Parameter Magnetik dan Bilangan Prandtl

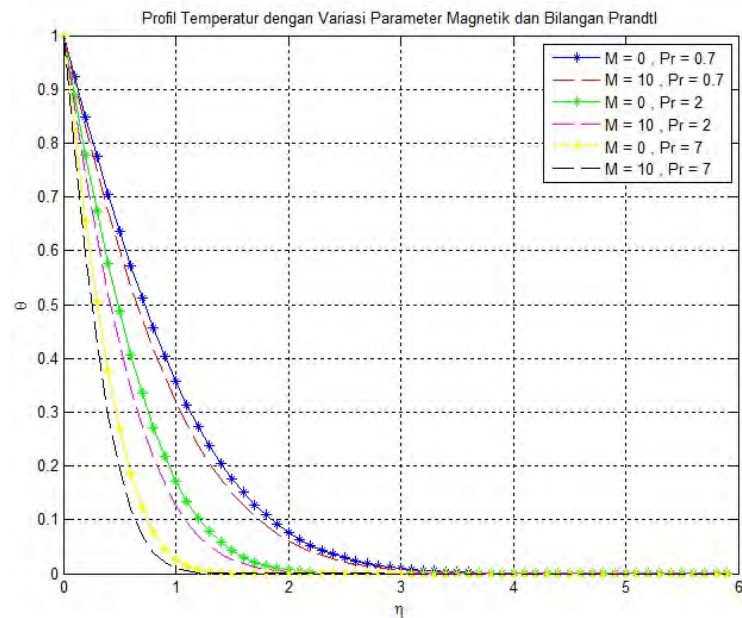
Gambaran mengenai variasi Parameter Magnetik dan Bilangan Prandtl terhadap profil kecepatan dan temperatur dapat dilihat pada Gambar 5.7 dan Gambar 5.8, pada grafik tersebut dilakukan perhitungan dengan menggunakan parameter tetap $\lambda = 1$ dengan variasi parameter $M = 0, 10$ dan $Pr = 0.7, 2, 7$.

Pada Gambar 5.7 dapat dilihat bahwa saat meningkatnya bilangan Prandtl, profil kecepatan semakin menurun. Saat parameter magnetik meningkat yaitu saat $M = 10$ maka kecepatan fluida meningkat atau lebih tinggi dibandingkan dengan $M = 0$. Sehingga dengan adanya variasi parameter magnetik dan bilangan Prandtl, dapat dilihat bahwa kecepatan fluida lebih tinggi seiring dengan meningkatnya parameter magnetik tetapi saat meningkatnya bilangan Prandtl dengan parameter Magnetik tertentu maka profil kecepatan akan menurun.

Sedangkan pada Gambar 5.8 menunjukkan pengaruh variasi parameter magnetik dan bilangan Prandtl. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa profil temperatur turun pada saat bilangan Prandtl meningkat. Pada saat bilangan Prandtl tertentu dengan parameter magnetik meningkat maka profil temperatur turun. Sehingga dapat dilihat bahwa seiring meningkatnya variasi bilangan Prandtl dan parameter magnetik menyebabkan profil temperatur turun.



Gambar 5.7: Profil Kecepatan Variasi Parameter Magnetik dan Bilangan Prandtl

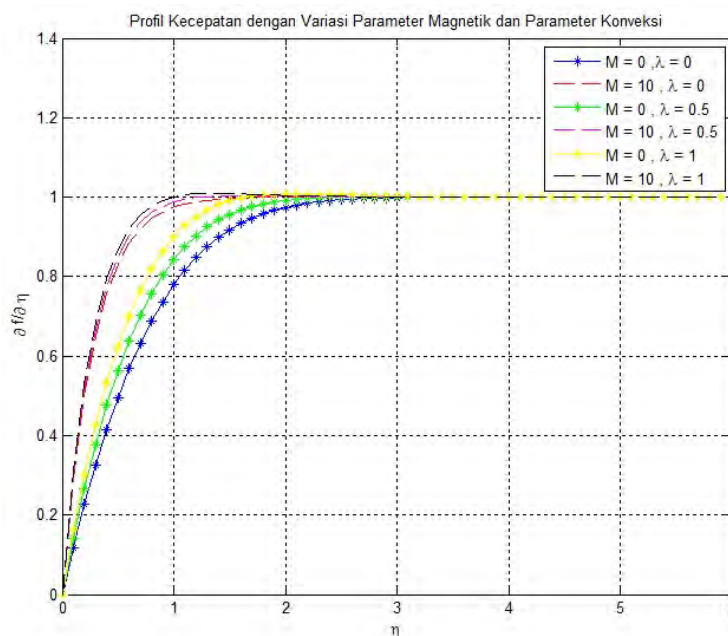


Gambar 5.8: Profil Temperatur Variasi Parameter Magnetik dan Bilangan Prandtl

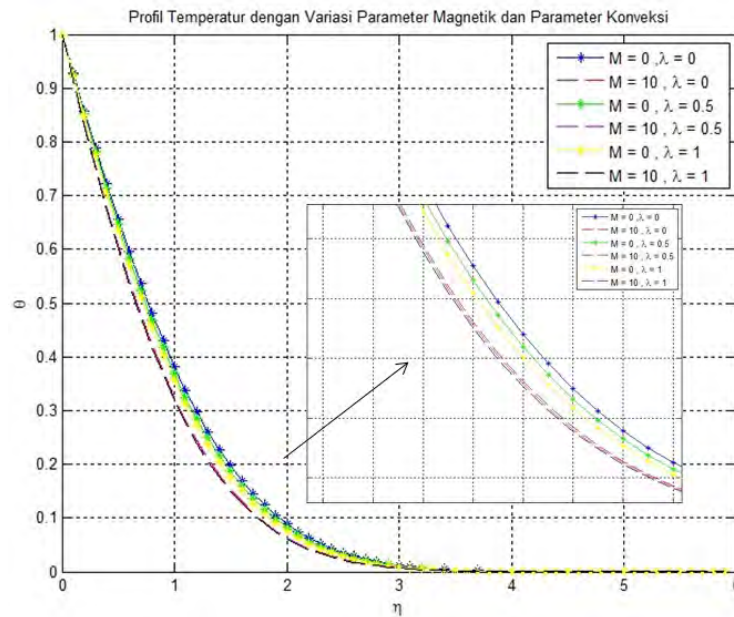
5.2.5 Pengaruh Parameter Magnetik dan Parameter Konveksi

Gambaran mengenai variasi Parameter Magnetik dan parameter konveksi terhadap profil kecepatan dan temperatur dapat dilihat pada Gambar 5.9 dan Gambar 5.10, pada grafik tersebut dilakukan perhitungan dengan menggunakan parameter tetap $Pr = 0.7$ dengan variasi parameter $M = 0, 10$ dan $\lambda = 0, 0.5, 1$. Pada Gambar 5.9 dapat dilihat pengaruh variasi parameter magnetik dan parameter konveksi terhadap profil kecepatan. Pada grafik tersebut terlihat bahwa semakin meningkatnya parameter magnetik maka semakin meningkat pula kecepatan fluida. Pengaruh variasi parameter magnetik ditambah dengan meningkatnya parameter konveksi ini yang mempengaruhi meningkatnya profil kecepatan.

Sedangkan pada Gambar 5.10 menunjukkan pengaruh variasi parameter magnetik dan parameter konveksi terhadap profil temperatur. Pada grafik tersebut ditunjukkan bahwa semakin meningkatnya parameter magnetik dan parameter konveksi maka profil temperatur semakin menurun. Dengan parameter magnetik yang besar maka temperatur fluida akan semakin menurun ditambah dengan pengaruh peningkatan parameter konveksi maka profil temperatur fluida akan lebih cepat menurun.



Gambar 5.9: Profil Kecepatan Variasi Parameter Magnetik dan Parameter Konveksi

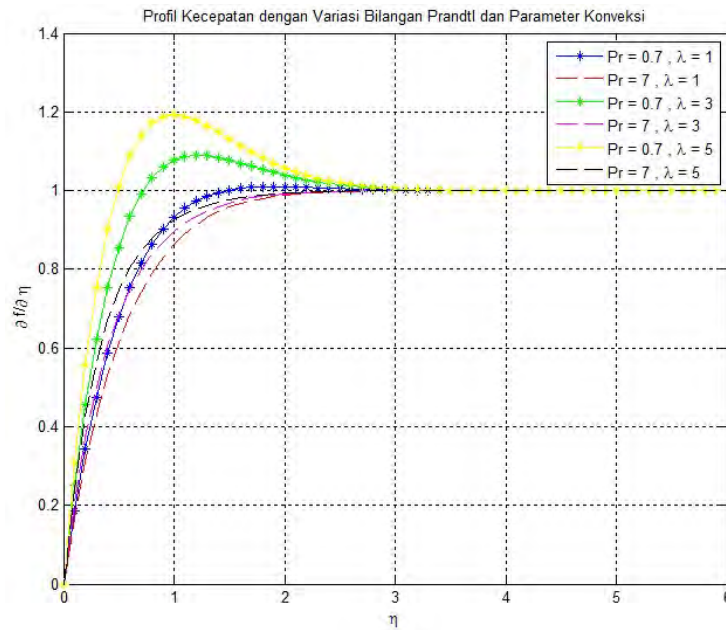


Gambar 5.10: Profil Temperatur Variasi Parameter Magnetik dan Parameter Konveksi

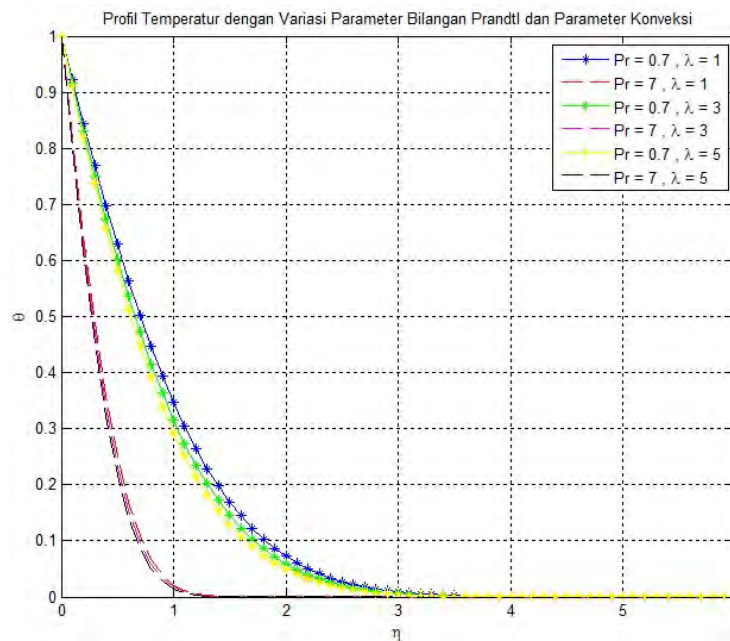
5.2.6 Pengaruh Bilangan Prandtl dan Parameter Konveksi

Gambaran mengenai variasi bilangan Prandtl dan parameter konveksi terhadap profil kecepatan dan temperatur dapat dilihat pada Gambar 5.11 dan Gambar 5.12, pada grafik tersebut dilakukan perhitungan dengan menggunakan parameter tetap $M = 1$ dengan variasi parameter $Pr = 0.7, 7$ dan $\lambda = 1, 3, 5$. Pada Gambar 5.9 dapat dilihat pengaruh variasi bilangan Prandtl dan parameter konveksi terhadap profil kecepatan. Pada grafik tersebut terlihat bahwa semakin meningkatnya bilangan Prandtl maka mengakibatkan menurunnya kecepatan fluida. Untuk pengaruh parameter konveksi, meningkatnya parameter konveksi mengakibatkan kecepatan fluida bertambah. Sehingga saat parameter konveksi meningkat dengan bilangan Prandtl tertentu maka kecepatan fluida meningkat, atau dapat dikatakan kecepatan fluida akan bertambah dengan meningkatnya parameter konveksi dengan bilangan Prandtl yang rendah.

Sedangkan pada Gambar 5.12 menunjukkan pengaruh variasi bilangan Prandtl dan parameter konveksi terhadap profil temperatur. Pada grafik tersebut ditunjukkan bahwa semakin meningkatnya bilangan Prandtl dan parameter konveksi maka profil temperatur semakin menurun. Dengan bilangan Prandtl yang besar maka temperatur fluida akan semakin menurun ditambah dengan pengaruh peningkatan parameter konveksi maka profil temperatur fluida akan lebih cepat menurun.



Gambar 5.11: Profil Kecepatan Variasi Bilangan Prandtl dan Parameter Konveksi



Gambar 5.12: Profil Temperatur Variasi Bilangan Prandtl dan Parameter Konveksi

LAMPIRAN

Lampiran 1. Penjabaran Turunan Tegangan Normal dan Tegangan Geser pada Persamaan Momentum

Turunan σ_{xx} terhadap x

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Turunan σ_{yy} terhadap y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Turunan τ_{yx} terhadap y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}$$

Turunan τ_{xy} terhadap x

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)\end{aligned}$$

sehingga komponen gaya permukaan yaitu

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \hat{j}$$

dapat dituliskan sebagai berikut

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \hat{j}$$

berdasarkan persamaan kontinuitas yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

sehingga gaya permukaan dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \hat{j} \\ \Leftrightarrow & \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \hat{j} \\ \Leftrightarrow & \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \hat{j} \\ \Leftrightarrow & -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}\end{aligned}$$

Lampiran 2. Transformasi Model Matematika Berdimensi ke Model Tak Berdimensi

Berikut ini adalah proses transformasi dari model matematika berdimensi yang tertera pada persamaan (4.80), (4.81), (4.82) dan (4.83) ke model matematika tak berdimensi dengan menggunakan variabel tak berdimensi di bawah ini :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{l} ; \quad y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{l}; u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \\ v &= Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}} ; \quad t = \frac{U_{\infty} \bar{t}}{l}; p = \frac{\bar{p}}{\rho U_{\infty}^2} \\ T &= \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w(x) - T_{\infty}} ; \quad T_w(x) = T_{\infty} + T_o x \end{aligned}$$

sehingga diperoleh :

1. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial(xl)} + \frac{\partial(vU_{\infty}Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(ylRe^{-\frac{1}{2}})} &= 0 \\ \frac{U_{\infty}}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_{\infty}}{l} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{U_{\infty}}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned}$$

selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan $\frac{l}{U_{\infty}}$, maka didapatkan persamaan kontinuitas tak berdimensi yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2. Persamaan Momentum Sumbu- x

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \rho \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g - \sigma \bar{u} B_o^2 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_o^2 \end{aligned}$$

(a) Untuk Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(tlU_\infty^{-1})} + (uU_\infty) \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xl)} + vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ylRe^{-\frac{1}{2}})} \\
&= \frac{U_\infty^2}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{uU_\infty^2}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{vU_\infty^2}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{U_\infty^2}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{l} v \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{U_\infty^2}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

(b) Untuk Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \beta(\bar{T} - T_\infty)g - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_o^2 \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho p U_\infty^2)}{\partial(xl)} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(xl)^2} + \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(ylRe^{-\frac{1}{2}})^2} \right) + \beta g T(T_w - T_\infty) - \frac{1}{\rho} \sigma(uU_\infty) B_o^2 \\
&= -\frac{U_\infty^2}{l} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{U_\infty}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{l^2} Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta g T(T_w - T_\infty) - \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_o^2 \\
&= -\frac{U_\infty^2}{l} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U_\infty}{\rho l^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta g T(T_w - T_\infty) - \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_o^2
\end{aligned}$$

selanjutnya ruas kiri sama dengan ruas kanan maka didapat

$$\begin{aligned}
\frac{U_\infty^2}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{U_\infty^2}{l} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U_\infty}{\rho l^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta g T(T_w - T_\infty) - \\
& \quad \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_o^2
\end{aligned}$$

kemudian dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{l}{U_\infty^2}$ diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho l U_\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta g T(T_w - T_\infty)l}{U_\infty^2} - \frac{\sigma u B_o^2 l}{\rho U_\infty}$$

dengan

$$M = \frac{\sigma B_o^2 l}{\rho U_\infty} ; \quad Re = \frac{U_\infty l}{\nu} ; \quad \lambda = \frac{\beta g l T_o}{U_\infty^2}$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho l U_{\infty}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \lambda T x - \left(\frac{\sigma B_o^2 l}{\rho U_{\infty}} \right) u \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{l U_{\infty}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \lambda T x - M u \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \lambda T x - M u \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda T x - M u
\end{aligned}$$

3. Persamaan Momentum Sumbu-y

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \rho \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g - \sigma \bar{v} B_o^2 \\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{v} B_o^2
\end{aligned}$$

(a) Untuk Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial (v U_{\infty} Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (t l U_{\infty})} + (u U_{\infty}) \frac{\partial (v U_{\infty} Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (x l)} + \frac{v U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (v U_{\infty} Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (y l Re^{-\frac{1}{2}})} \\
&= \frac{U_{\infty}^2}{l Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u U_{\infty}^2}{l Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{v U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{l} \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{U_{\infty}^2}{l Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U_{\infty}^2}{l Re^{\frac{1}{2}}} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{U_{\infty}^2}{l Re^{\frac{1}{2}}} v \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{U_{\infty}^2}{l Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

(b) Untuk Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{v} B_o^2 \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p \rho U_{\infty}^2)}{\partial (y l Re^{-\frac{1}{2}})} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 (v U_{\infty} Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (x l)^2} + \frac{\partial^2 (v U_{\infty} Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (y l Re^{-\frac{1}{2}})^2} \right) + \beta g T (T_w - T_{\infty}) - \\
& \quad \frac{\sigma (v U_{\infty} Re^{-\frac{1}{2}}) B_o^2}{\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{l} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}} l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}} l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta g T (T_w - T_\infty) - \\
&\quad \frac{\sigma v U_\infty B_o^2}{\rho Re^{\frac{1}{2}}} \\
&= - \left(\frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{l} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}} l^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta g T (T_w - T_\infty) - \frac{\sigma v U_\infty B_o^2}{\rho Re^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

selanjutnya ruas kiri sama dengan ruas kanan maka didapat

$$\begin{aligned}
\frac{U_\infty^2}{l Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{l} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}} l^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \\
&\quad \beta g T (T_w - T_\infty) - \frac{\sigma v U_\infty B_o^2}{\rho Re^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

kemudian dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{l}{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}$ maka didapat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho l Re U_\infty} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta g l T (T_w - T_\infty)}{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad \left(\frac{\sigma B_o^2 l}{\rho U_\infty Re} \right) v - \\
\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta g l T_o x}{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}} T - \\
&\quad \left(\frac{\sigma B_o^2 l}{\rho U_\infty Re} \right) v
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\sigma B_o^2 l}{\rho U_\infty} \\
\lambda &= \frac{\beta g l T_o}{U_\infty^2}
\end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \lambda T - \frac{M}{Re} v \\ \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \lambda T - \frac{M}{Re} v\end{aligned}$$

4. Persamaan Energi

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

(a) Untuk Ruas Kiri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(tlU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(xl)} + \\ &\quad \frac{vU_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ylRe^{-\frac{1}{2}})} \\ &= \frac{U_\infty}{l} (T_w - T_\infty) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{uU_\infty}{l} \frac{\partial T(T_w - T_\infty)}{\partial x} + \\ &\quad \frac{vU_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{Re^{\frac{1}{2}}}{l} (T_w - T_\infty) \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty}{l} (T_o x) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{uU_\infty}{l} \frac{\partial T(T_o x)}{\partial x} + \frac{vU_\infty}{l} (T_o x) \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty}{l} (T_o x) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{uU_\infty}{l} \left((T_o x) \frac{\partial T}{\partial x} + T_o T \right) + \frac{vU_\infty}{l} (T_o x) \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty}{l} \left((T_o x) \frac{\partial T}{\partial t} + u \left((T_o x) \frac{\partial T}{\partial x} + T_o T \right) + v(T_o x) \frac{\partial T}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

(b) Untuk Ruas Kanan

$$\begin{aligned}\alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) &= \alpha \left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(xl)^2} + \frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ylRe^{-\frac{1}{2}})^2} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{l^2} \frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty))}{\partial x^2} + \frac{Re}{l^2} (T_w - T_\infty) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{l^2} (T_o x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Re}{l^2} (T_o x) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\alpha Re}{l^2} (T_o x) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

dengan

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} ; Re = \frac{U_{\infty} l}{\nu}$$

selanjutnya ruas kiri sama dengan ruas kanan maka didapat

$$\frac{U_{\infty}}{l} \left((T_o x) \frac{\partial T}{\partial t} + u \left((T_o x) \frac{\partial T}{\partial x} + T_o T \right) + v (T_o x) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\alpha Re}{l^2} (T_o x) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

kemudian dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{l}{U_{\infty} T_o x}$ maka didapat

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T_o T}{T_o x} \right) + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\alpha}{l^2} \frac{l}{U_{\infty}} Re \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + u \frac{T}{x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\alpha}{U_{\infty} l} \frac{U_{\infty} l}{\nu} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + u \frac{T}{x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + u \frac{T}{x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Lampiran 3. Perhitungan Persamaan Similaritas

Berdasarkan persamaan tak berdimensi yang telah dilakukan pendekatan lapisan batas yaitu pada Persamaan (4.92), (4.95) dan (4.100), selanjutnya akan dilakukan transformasi ke bentuk persamaan similaritas menggunakan fungsi alir sesuai dengan (4.101) sebagai berikut :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dengan variabel similaritas yang telah ditunjukkan pada Persamaan (4.105) yaitu

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) f(\eta, t), \quad T = \theta(\eta, t), \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}}$$

maka diperoleh

1. Persamaan Kontinuitas

Berikut ini adalah pembuktian fungsi alir yang memenuhi Persamaan (4.92) (Persamaan Kontinuitas). Diberikan bahwa Persamaan (4.92) (Persamaan Kontinuitas) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (\text{Terbukti}) \end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M(u - u_e) + \lambda T x \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \\ &M \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \lambda T x \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \\ &M \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \lambda T x \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial(t^{\frac{1}{2}}u_e(x)f(\eta, t))}{\partial y} = t^{\frac{1}{2}}u_e(x)\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = t^{\frac{1}{2}}u_e(x)\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = u_e(x)\frac{\partial f}{\partial \eta} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial(t^{\frac{1}{2}}u_e(x)f(\eta, t))}{\partial x} = t^{\frac{1}{2}}f(\eta, t)\frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_e(x)\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial \eta}\right) = u_e(x)\frac{\partial^2 f(\eta, t)}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial^2 f(\eta, t)}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial^2 f(\eta, t)}{\partial \eta^2}\right) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial^3 f(\eta, t)}{\partial \eta^3}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial^3 f(\eta, t)}{\partial \eta^3}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{t}u_e(x)\frac{\partial^3 f(\eta, t)}{\partial \eta^3} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(u_e(x)\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(u_e(x)\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(u_e(x)\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial \eta}\right) = u_e(x)\left(-\frac{\eta}{2t}\right)\frac{\partial^2 f(\eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x)\frac{\partial^2 f(\eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_e(x)\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial u_e(x)}{\partial x}\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

selanjutnya dapat dituliskan bahwa $u_e(x) = u_e$ dan $f(\eta, t) = f$, sehingga persamaan similaritas untuk persamaan momentum yaitu

Untuk Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e\left(-\frac{\eta}{2t}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) - \\
&\quad t^{\frac{1}{2}}f\frac{\partial u_e}{\partial x}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
&= u_e\left(-\frac{\eta}{2t}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) - \\
&\quad u_e\frac{\partial u_e}{\partial x}f\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Untuk Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - M\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e\right) + \lambda Tx &= u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{1}{t}u_e\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} - M\left(u_e\frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e\right) + \lambda \theta x \\
&= u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{1}{t}u_e\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} - Mu_e\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) + \lambda \theta x
\end{aligned}$$

selanjutnya ruas kiri sama dengan ruas kanan maka didapatkan

$$\begin{aligned}
u_e \left(-\frac{\eta}{2t} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) & - u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{t} u_e \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\
& - M u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \lambda \theta x \\
u_e \left(-\frac{\eta}{2t} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 & - u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{t} u_e \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\
& - M u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \lambda \theta x
\end{aligned}$$

kemudian kedua ruas dikalikan $\frac{t}{u_e}$ maka didapatkan

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} & = t \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\
& - M t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \lambda \theta t x \frac{1}{u_e} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) & = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\
& + M t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) - \frac{\lambda \theta t x}{u_e}
\end{aligned}$$

3. Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + u \frac{T}{x} + v \frac{\partial T}{\partial y} & = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{T}{x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} & = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} & = \frac{\partial \theta(\eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \theta(\eta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \theta(\eta, t)}{\partial \eta} \left(-\frac{\eta}{2t} \right) + \frac{\partial \theta(\eta, t)}{\partial t} \\
\frac{\partial T}{\partial y} & = \frac{\partial \theta(\eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \theta(\eta, t)}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} & = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \theta(\eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 \theta(\eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
& = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 \theta(\eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{t} \frac{\partial^2 \theta(\eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

untuk selanjutnya dapat dituliskan bahwa $\theta(\eta, t) = \eta$ sehingga persamaan similaritas untuk energi yaitu

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} - t^{\frac{1}{2}} f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{Pr t} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \\ -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{1}{Pr t} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $Pr t$ maka didapatkan

$$\begin{aligned} -Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + Pr t \frac{\partial \theta}{\partial t} + Pr t \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} - Pr t f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} Pr \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + Pr t f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - Pr t \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} &= Pr t \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned}$$

Lampiran 4. Penurunan Kondisi Awal

Untuk mendapatkan kondisi awal dari persamaan berikut ini:

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' + t(1 - (f')^2) + ff'' - Mt(f' - 1) + \lambda\theta t = t\frac{\partial f'}{\partial t}$$
$$\theta'' + Pr\frac{\eta}{2}\theta' + Prtf\theta' - Prt\theta f' = Prt\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

dengan mensubstitusikan $t = 0$ maka didapatkan persamaan

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' = 0$$
$$\theta'' + Pr\frac{\eta}{2}\theta' = 0$$

- Untuk mendapatkan f

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' = 0$$

diubah dahulu ke dalam bentuk persamaan diferensial orde satu, dengan memisalkan $f'' = k$ sehingga persamaan menjadi

$$k' + \frac{\eta}{2}k = 0$$

dengan $k' = \frac{dk}{d\eta}$ maka dapat dituliskan

$$dk + \frac{\eta}{2}k d\eta = 0$$

kemudian kedua ruas dibagi dengan k sehingga didapatkan

$$\frac{1}{k}dk + \frac{\eta}{2}d\eta = 0$$

kedua ruas diintegralkan didapatkan

$$\ln k + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$
$$\ln k = -\frac{\eta^2}{4} + c_1$$
$$k = e^{\frac{\eta^2}{4} + c_1}$$
$$k = e^{c_1} e^{\frac{\eta^2}{4}}$$

karena $k = f''$ maka

$$\begin{aligned} f'' &= e^{c_1} e^{\frac{\eta^2}{4}} \\ f' &= \int e^{c_1} e^{\frac{\eta^2}{4}} \\ f' &= e^{c_1} \int e^{\frac{\eta^2}{4}} \end{aligned}$$

dengan substitusi kondisi batas pada Persamaan (4.111) didapatkan

$$\text{saat } \eta = 0 \Rightarrow e^{c_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

sehingga

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\eta^2}{4}} \\ f' &= \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{aligned}$$

dengan mengintegralkan f' didapatkan

$$f = \eta \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) - 1 \right\}$$

- Untuk mendapatkan θ

$$\theta'' + Pr \frac{\eta}{2} \theta' = 0$$

diubah dahulu ke dalam bentuk persamaan diferensial orde satu, dengan memisalkan $\theta' = h$ sehingga persamaan menjadi

$$h' + \frac{Pr\eta}{2} h = 0$$

dengan $h' = \frac{dh}{d\eta}$ maka dapat dituliskan

$$dh + \frac{Pr\eta}{2} h d\eta = 0$$

kemudian kedua ruas dibagi dengan h sehingga didapatkan

$$\frac{1}{h} dh + \frac{Pr\eta}{2} d\eta = 0$$

kedua ruas diintegalkan didapatkan

$$\begin{aligned}\ln h + \frac{Pr\eta^2}{4} &= c_2 \\ \ln h &= -\frac{Pr\eta^2}{4} + c_2 \\ h &= e^{\frac{Pr\eta^2}{4} + c_2} \\ h &= e^{c_2} e^{\frac{Pr\eta^2}{4}}\end{aligned}$$

karena $h = f'$ maka

$$\begin{aligned}\theta' &= e^{c_2} e^{\frac{Pr\eta^2}{4}} \\ \theta &= \int e^{c_2} e^{\frac{Pr\eta^2}{4}} \\ \theta &= e^{c_2} \int e^{\frac{Pr\eta^2}{4}}\end{aligned}$$

dengan substitusi kondisi batas pada Persamaan (4.111) didapatkan

$$\text{saat } \eta = 0 \Rightarrow e^{c_2} = \sqrt{\frac{Pr}{\pi}}$$

sehingga

$$\theta' = \sqrt{\frac{Pr}{\pi}} e^{\frac{\eta^2}{4}}$$

dengan mengintegalkan θ' didapatkan

$$\theta = -\text{erf}\left(\frac{\sqrt{Pr}}{2}\eta\right) + 1$$

Lampiran 5. Diskritisasi Model

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' + t(1 - (f')^2) + ff'' - Mt(f' - 1) + \lambda\theta t = t \frac{\partial f'}{\partial t}$$

$$\theta'' + Pr \frac{\eta}{2}\theta' + Prtf\theta' - Prt\theta f' = Prt \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Berdasarkan pemisalan fungsi dalam bentuk orde pertama yaitu :

$$f' = u$$

$$u' = v$$

$$\theta' = q$$

$$v' + \frac{\eta}{2}v' + t(1 - (u^2) + fv) + Mt(1 - u) + \lambda\theta t = t \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$q' + Pr \frac{\eta}{2}q + Prtfq - Prt\theta u = Prt \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

dapat didiskritisasi menjadi

1.

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{\ell_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{\ell_j} = \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{2}$$

2.

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\ell_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\ell_j} = \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{2}$$

3.

$$\frac{(\theta_j^n - \theta_{j-1}^n)}{\ell_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$\frac{(\theta_j^n - \theta_{j-1}^n)}{\ell_j} = \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{2}$$

4.

$$\frac{1}{2} \left[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[v' + \frac{\eta}{2}v' + t(1 - (u^2) + fv) + Mt(1 - u) + \lambda\theta t \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{\ell_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
&\quad Mt^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \lambda t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[v' + \frac{\eta}{2}v' + t(1 - (u^2) + fv) + Mt(1 - u) + \lambda\theta t \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\
&\quad Mt^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \lambda t^{n-1} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
&\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{\ell_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + Mt^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \\
&\lambda t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\
&Mt^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \lambda t^{n-1} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
\Leftrightarrow &\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{\ell_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + Mt^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \\
&\lambda t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - Mt^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \\
&t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \lambda t^{n-1} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

5.

$$\frac{1}{2} \left[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = Prt^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta_{j-\frac{1}{2}}^n - \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[q' + Pr \frac{\eta}{2}q + Prt f q - Prt \theta u \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{\ell_j} + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}q_{j-\frac{1}{2}}^n + Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - Prt^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[q' + Pr \frac{\eta}{2} q + Prt f q - Prt \theta u \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Prt^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^n - \\
&\quad Prt^{n-1} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
&\frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{\ell_j} + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - Prt^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n + \\
&\frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Prt^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^n - Prt^{n-1} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
\Leftrightarrow &\frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{\ell_j} + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - Prt^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \\
&2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - Prt^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \\
&Prt^{n-1} (\theta u)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Setelah dilakukan diskritisasi maka dilakukan linierisasi dengan metode Newton sebagai berikut :

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_j} (f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{1}{\ell_j} (\delta f_j - \delta f_{j-1}) &= \frac{1}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) \\
(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{\ell_j}{2} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{\ell_j}{2} (\delta u_j - \delta u_{j-1})
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_j} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{\ell_j} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) &= \frac{1}{2} (v_j^n - v_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\delta v_j - \delta v_{j-1}) \\
(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{\ell_j}{2} (\delta v_j - \delta v_{j-1}) &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\ell_j}{2} (v_j^n - v_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell_j}(\theta_j^n - \theta_{j-1}^n) + \frac{1}{\ell_j}(\delta\theta_j - \delta\theta_{j-1}) &= \frac{1}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) \\ (\delta\theta_j - \delta\theta_{j-1}) - \frac{\ell_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) &= -(\theta_j^n - \theta_{j-1}^n) + \frac{\ell_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}& \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\ell_j} \right) + \left(\frac{\delta v_j - \delta v_{j-1}}{\ell_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + \\ & t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \right. \\ & \left. \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \right) + Mt^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \right) + \\ & \lambda t^n \left(\theta_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta\theta_j + \delta\theta_{j-1}}{2} \right) - \frac{2t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = R_1 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\delta v_j - \delta v_{j-1}}{\ell_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{\ell_j} \right) + t^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 - \\ & t^n \left(2u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \right) + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \\ & t^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) - Mt^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) + \\ & \lambda t^n \left(\frac{\delta\theta_j + \delta\theta_{j-1}}{2} \right) - \frac{2t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = -\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{\ell_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n - \\ & t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - Mt^n (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) - \lambda t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n + R_1\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}& \left(\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\ell_j} \right) + \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{\ell_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \\ & Pr t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) - Pr t^n \left(\theta_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta\theta_j + \delta\theta_{j-1}}{2} \right) \\ & \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\theta_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta\theta_j + \delta\theta_{j-1}}{2} \right) = R_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & \left(\frac{\delta q_j^n - \delta q_{j-1}^n}{\ell_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \\
& Pr t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + Pr t^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) - \\
& Pr t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - Pr t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta \theta_j + \delta \theta_{j-1}}{2} \right) - \\
& Pr t^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) - 2Pr \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta \theta_j + \delta \theta_{j-1}}{2} \right) = \\
& - \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{\ell_j} - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n - Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n + Pr t^n \theta_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n + \\
& 2Pr \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
R_1 &= - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - M t^{n-1} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \\
& t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \lambda t^{n-1} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
R_2 &= - \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{\ell_j} - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \\
& Pr t^{n-1} (\theta u)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Lampiran 6. Program Simulasi menggunakan *MATLAB*

```
1 clear all
2 clc
3 close all
4 format long
5 np = 60;
6 nt = 33;
7 nt1= 21;
8 Pr =0.7;
9 alpha=1;
10 deleta = 0.2;
11 eta(1) = 0.0;
12 etac(1) = 0.0;
13 delt = 0.05;
14 Magnet(1)=0;
15 Magnet(2)=10;
16 Magnet(3)=20;
17 Magnet(4)=30;
18
19 for j = 2:np
20     eta(j) = eta(j-1) + deleta;
21     etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
22 end
23
24 for n = 1 : nt
25     if n == 1
26         t(1) = 0.0;
27         t1(1) = 0.0;
28     else
29         t(n) = t(n-1) + delt;
30         t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
31     end
32 end
33 for i=1:4
34     M=Magnet(i);
35 for n = 1:nt
```

```

36     k=1;
37     stop = 1;
38     while stop > 0.00001
39 %% Initial Condition
40     for j = 1:np
41         if n == 1
42             f(j,1,n) = eta(j)*erf(0.5*eta(j)) + (2\sqrt(pi))*(
                     exp(-0.25*((eta(j))^2))-1);
43             u(j,1,n) = erf(0.5*eta(j));
44             v(j,1,n) = (1/\sqrt(pi))*exp(-0.25*((eta(j))^2));
45             s(j,1,n) = -erf(0.5*(sqrt(Pr))*eta(j)) + 1;
46             q(j,1,n) = - sqrt(Pr/pi)*exp(-0.25*Pr*(eta(j))^2);
47         else
48             f(j,1,n) = ff(j,n-1);
49             u(j,1,n) = uu(j,n-1);
50             v(j,1,n) = vv(j,n-1);
51             s(j,1,n) = ss(j,n-1);
52             q(j,1,n) = qq(j,n-1);
53         end
54     end
55
56     for j = 2:np
57         if n == 1
58             cfb(j,n) = 0;    cub(j,n) = 0;
59             cvb(j,n) = 0;    cdervb(j,n) = 0;
60             cfvfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
61             csb(j,n) = 0;    cqjb(j,n) = 0;
62             cderqb(j,n) = 0;    cfqfqjb(j,n) = 0;
63         else
64             cfb(j,n) = ffb(j,n-1);
65             cub(j,n) = utb(j,n-1);
66             cvb(j,n) = vvb(j,n-1);
67             csb(j,n) = ssb(j,n-1);
68             cqjb(j,n) = qqjb(j,n-1);
69             cunb(j,n) = cub(j,n)^2;
70             cdervb(j,n) = ddervb(j,n-1);

```

```

71         cderqb(j,n)= dderqb(j,n-1);
72         cfqfqb(j,n)= cfb(j,n)*cqb(j,n);
73         cususb(j,n)= cub(j,n)*csb(j,n);
74     end
75     fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n)+f(j-1,k,n));
76     ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n)+u(j-1,k,n));
77     vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n)+v(j-1,k,n));
78     sb(j,k,n) = 0.5*(s(j,k,n)+s(j-1,k,n));
79     qb(j,k,n) = 0.5*(q(j,k,n)+q(j-1,k,n));
80     dervb(j,k,n) = (v(j,k,n)-v(j-1,k,n))/deleta;
81     fvfvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
82     unb(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;
83     derqb(j,k,n) = (q(j,k,n)-q(j-1,k,n))/deleta;
84     fqfqb(j,k,n) = fb(j,k,n)*qb(j,k,n);
85
86     if n < nt1+1
87         a1(j,k) = 0.5*t1(n)*vb(j,k,n);
88         a2(j,k) = a1(j,k);
89         a3(j,k) = t1(n)*ub(j,k,n) - 0.5*M*t1(n) - t1(n)
90             /delt;
91         a4(j,k) = a3(j,k);
92         a5(j,k) = 1/deleta + 0.25*etac(j) + 0.5*t1(n)*
93             fb(j,k,n);
94         a6(j,k) = -1/deleta + 0.25*etac(j) + 0.5*t1(n)*
95             fb(j,k,n);
96         a7(j,k) = alpha*t1(n)*0.5;
97         a8(j,k) = a7(j,k);
98
99         b1(j,k) = 1/deleta + 0.25*Pr*etac(j) + 0.5*Pr*
100             t1(n)*fb(j,k,n);
101         b2(j,k) = -1/deleta + 0.25*Pr*etac(j) + 0.5*Pr*
102             t1(n)*fb(j,k,n);
103         b3(j,k) = 0.5*Pr*t1(n)*qb(j,k,n);
104         b4(j,k) = b3(j,k);
105         b5(j,k) = -(0.5*t1(n)*Pr*ub(j,k,n))-(Pr*t1(n))/
106             delt;

```

```

101     b6(j,k) = b5(j,k);
102     b7(j,k) = -(0.5*t1(n)*Pr*sb(j,k,n));
103     b8(j,k) = b7(j,k);
104
105     r1(j,k) = f(j-1,k,n)-f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);
106     r2(j,k) = u(j-1,k,n)-u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
107     r3(j,k) = s(j-1,k,n)-s(j,k,n)+deleta*qb(j,k,n);
108     r4(j,k) = -cdervb(j,n) - 0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
        t1(n)*(1-cunb(j,n) + cfvfvb(j,n)) - M*t1(n)
        *(1-cub(j,n)) - ...
109     2*t1(n)*cub(j,n)/delt - alpha*t1(n)*csb(j,n)
        ) - dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n)
        - t1(n)*(1-unb(j,k,n) + fvfvb(j,k,n)) -
        ...
110     M*t1(n)*(1-ub(j,k,n)) + 2*t1(n)*ub(j,k,n)/
        delt - alpha*t1(n)*sb(j,k,n);
111     r5(j,k) = -cderqb(j,n) - 0.5*Pr*etac(j)*cqb(j,n)
        ) - Pr*t1(n)*cfqfqb(j,n) + Pr*t1(n)*cususb(j
        ,n)- ...
112     2*Pr*t1(n)*csb(j,n)/delt - derqb(j,k,n) -
        0.5*Pr*etac(j)*qb(j,k,n) - ...
113     Pr*t1(n)*fqfqb(j,k,n) + Pr*t1(n)*ususb(j,k,
        n) + 2*Pr*t1(n)*sb(j,k,n)/delt;
114
115     else
116     a1(j,k) = 0.5*vb(j,k,n);
117     a2(j,k) = a1(j,k);
118     a3(j,k) = -ub(j,k,n) - 0.5*M - 1/delt;
119     a4(j,k) = a3(j,k);
120     a5(j,k) = 1/deleta + 0.5*fb(j,k,n);
121     a6(j,k) = -1/deleta + 0.5*fb(j,k,n);
122     a7(j,k) = alpha*0.5;
123     a8(j,k) = a7(j,k);
124
125     b1(j,k) = 1/deleta + 0.5*Pr*fb(j,k,n);
126     b2(j,k) = -1/deleta + 0.5*Pr*fb(j,k,n);

```

```

127     b3(j,k) = 0.5*Pr*qb(j,k,n);
128     b4(j,k) = b3(j,k);
129     b5(j,k) = -(0.5*Pr*ub(j,k,n))-Pr/delt;
130     b6(j,k) = b5(j,k);
131     b7(j,k) = -(0.5*Pr*sb(j,k,n));
132     b8(j,k) = b7(j,k);
133
134     r1(j,k) = f(j-1,k,n)-f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);
135     r2(j,k) = u(j-1,k,n)-u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
136     r3(j,k) = s(j-1,k,n)-s(j,k,n)+deleta*qb(j,k,n);
137     r4(j,k) = -cdervb(j,n) - (1-cunb(j,n) + cfvfvb(
        j,n)) - M*(1-cub(j,n)) - ...
138         2*cub(j,n)/delt - alpha*csb(j,n) - dervb(j,
        k,n) - (1-unb(j,k,n) + fvfvb(j,k,n)) -
        ...
139         M*(1-ub(j,k,n)) + 2*ub(j,k,n)/delt - alpha*
        sb(j,k,n);
140     r5(j,k) = -cderqb(j,n) - Pr*cfqfqqb(j,n) + Pr*
        cususb(j,n) - ...
141         2*Pr*csb(j,n)/delt - derqb(j,k,n) - Pr*
        fqfqqb(j,k,n) + Pr*ususb(j,k,n) + 2*Pr*sb
        (j,k,n)/delt;
142     end
143 end
144 % Matrices
145 a{2,k} = [ 0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta
        0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta; a6(2,k) 0 a1
        (2,k) a5(2,k) 0; 0 b2(2,k) b3(2,k) 0 b1(2,k)];
146 for j = 3:np
147     a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1 0 0 -0.5*
        deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta; a4(j,k) a8(j
        ,k) a1(j,k) a5(j,k) 0; b8(j,k) b6(j,k) b3(j,
        k) 0 b1(j,k)];
148     b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -0.5*deleta 0; 0 0
        0 0 -0.5*deleta; 0 0 a2(j,k) a6(j,k) 0; 0 0
        b4(j,k) 0 b2(j,k)];

```



```

149     end;
150     for j = 2:np
151         c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1 0 0 0 0; 0 1 0
                    0 0; a3(j,k) a7(j,k) 0 0 0; b7(j,k) b5(j,k)
                    0 0 0];
152     end;
153     alfa{2,k} = a{2,k};
154     gamma{2,k} = inv( alfa{2,k})*c{2,k};
155     for j = 3:np
156         alfa{j,k} = a{j,k}-(b{j,k}*gamma{j-1,k});
157         gamma{j,k} = inv( alfa{j,k})*c{j,k};
158     end;
159     for j = 2:np
160         rr{j,k} = [r1(j,k);r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j
                    ,k)];
161     end;
162     ww{2,k} = inv( alfa{2,k})*rr{2,k};
163     for j = 3:np
164         ww{j,k} = inv( alfa{j,k})*(rr{j,k}-(b{j,k}*ww{j
                    -1,k}));
165     end;
166     %% backward sweep
167     delu(1,k) = 0;
168     dels(1,k) = 0;
169     delf(1,k) = 0;
170     delu(np,k) = 0;
171     dels(np,k) = 0;
172     dell{np,k} = ww{np,k};
173
174     for j = np-1:-1:2
175         dell{j,k} = ww{j,k} - (gamma{j,k}*dell{j+1,k});
176     end;
177     delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
178     delq(1,k) = dell{2,k}(2,1);
179     delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
180     delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);

```

```

181     delq(2,k) = dell{2,k}(5,1);
182
183     for j = np:-1:3
184         delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
185         dels(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
186         delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
187         delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
188         delq(j,k) = dell{j,k}(5,1);
189     end;
190
191     %% Newton's Method
192     for j = 1:np
193         f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
194         u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
195         v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
196         s(j,k+1,n) = s(j,k,n) + dels(j,k);
197         q(j,k+1,n) = q(j,k,n) + delq(j,k);
198     end;
199     stop = abs(delv(1,k));
200     kmax = k;
201     k = k + 1;
202 end
203     for j = 1:np
204         ff(j,n) = f(j,k,n);
205         uu(j,n) = u(j,k,n);
206         vv(j,n) = v(j,k,n);
207         ss(j,n) = s(j,k,n);
208         qq(j,n) = q(j,k,n);
209     end
210     for j=1:np
211         ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
212         utb(j,n) = ub(j,kmax,n);
213         vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);
214         ssb(j,n) = sb(j,kmax,n);
215         qqb(j,n) = qb(j,kmax,n);
216         ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);

```

```

217         dderqb(j,n) = derqb(j,kmax,n);
218     end
219
220 end
221
222 if (i==1)
223     figure(1)
224     plot(eta,u(:,kmax,nt),'-*b')
225     hold on;
226     grid on;
227     figure(2)
228     plot(eta,s(:,kmax,nt),'-*b')
229     hold on;
230     grid on;
231     elseif (i==2)
232     figure(1)
233     plot(eta,u(:,kmax,nt),'—b')
234     hold on;
235     grid on;
236     figure(2)
237     plot(eta,s(:,kmax,nt),'—b')
238     hold on;
239     grid on;
240     elseif (i==3)
241     figure(1)
242     plot(eta,u(:,kmax,nt),'-b')
243     hold on;
244     grid on;
245     figure(2)
246     plot(eta,s(:,kmax,nt),'-b')
247     hold on;
248     grid on;
249     elseif (i==4)
250     figure(1)
251     plot(eta,u(:,kmax,nt),'-ob')
252     hold on;

```

```

253 grid on;
254 title('Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter
      Magnetik')
255 legend('M = 0', 'M = 0.5', 'M = 1', 'M = 2')
256 xlabel('η')
257 ylabel('∂f/∂η')
258 figure(2)
259 plot(eta, s(:,kmax,nt), '-ob')
260 hold on;
261 grid on;
262 title('Profil Temperatur dengan Variasi Parameter
      Magnetik')
263 legend('M = 0', 'M = 0.5', 'M = 1', 'M = 2')
264 xlabel('η')
265 ylabel('θ')
266 end
267 end

```

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang dilakukan di bab - bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model matematika aliran tak tunak konveksi campuran pada fluda kental MHD yang melewati pelat datar dibangun oleh tiga persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi. Model matematika tersebut diperoleh berdasarkan penguraian hukum kekekalan massa, hukum II Newton dan hukum I Termodinamika. Pendekatan Boussinesq diterapkan pada persamaan pembangun kemudian diubah ke dalam bentuk model persamaan tak berdimensi dan dilakukan transformasi ke dalam bentuk persamaan similaritas untuk mendapatkan model akhir aliran tak tunak konveksi campuran pada fluda kental MHD yang melewati pelat datar.
2. Penyelesaian numerik diawali dengan mengubah model matematika menjadi persamaan orde satu setelah itu dengan menggunakan beda hingga pusat didapatkan diskritisasi model. Setelah didapatkan diskritisasi model dalam bentuk tak linier, dilakukan linierisasi model dengan metode Newton dan diselesaikan dengan Eliminasi Matriks Blok Tridiagonal.
3. Pengaruh dari parameter magnetik, bilangan Prandtl dan parameter konveksi terhadap profil kecepatan dan profil tempaeratur, berdasarkan grafik yang didapatkan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :
 - (a) Pengaruh parameter magnetik (M) terhadap profil kecepatan (f') dari posisi aliran pada pelat datar saat $\eta = 0$ ke luar aliran. Semakin meningkat parameter magnetik maka semakin meningkat profil kecepatan aliran fluida. Namun, pengaruh parameter magnetik (M) terhadap profil temperatur (θ) yaitu semakin meningkat parameter magnetik maka semakin menurun profil temperatur.

- (b) Pengaruh parameter bilangan Prandtl (Pr) terhadap profil kecepatan (f') dan profil temperatur (θ) dari posisi aliran pada pelat datar saat $\eta = 0$ ke luar aliran. Semakin meningkat parameter bilangan Prandtl maka semakin menurun profil kecepatan dan profil temperatur.
- (c) Pengaruh parameter konveksi (λ) terhadap profil kecepatan (f') dari posisi aliran pada pelat datar saat $\eta = 0$ ke luar aliran. Semakin meningkat parameter konveksi maka semakin meningkat pula profil kecepatan fluida. Namun, pengaruh parameter konveksi (λ) terhadap profil temperatur (θ) yaitu semakin meningkat parameter konveksi maka semakin menurun profil temperatur.

6.2 Saran

Berdasarkan hasil dan kesimpulan penelitian mengenai aliran tak tunak fluida kental MHD yang melewati pelat datar dengan pengaruh konveksi campuran, maka peneliti memberikan saran untuk pembaca sebagai berikut.

1. Media yang digunakan yaitu pelat datar dalam bentuk horizontal dengan aliran yang bergerak dari bawah ke atas.
2. Dapat digunakan flux panas tidak konstan sehingga ada perpindahan panas dari fluida ke benda.
3. Pada penelitian ini penelitian dilakukan pada aliran medan magnet yang tidak mengalami induksi, diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian dengan memperhitungkan adanya induksi medan magnet

DAFTAR PUSTAKA

- Alian, H. (2015), "Pengaruh Tegangan pada Proses Elektroplating Baja dengan Pelapis Seng dan Krom terhadap Kekerasan dan Laju Korosinya", *Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin (SNTTM) ke-9, Palembang*, 13-15 Oktober 2010.
- Arber, T. (2013), *Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD)*. Lecture handout:University of Warwick. UK.
- Aurangzaib, Kasim, A.R.M., Mohammad, N.F., dan Shafie, S. (2013), "Unsteady MHD Mixed Convection Flow with Heat and Mass Transfer over a Vertical Plate in a Micropolar Fluid-Saturated Porous Medium". *Journal of Applied Science and Engineering*. 141-150.
- Chamkha, A.J.,Takhar, H.S., dan Nath, G. (2004), "Mixed Convection Flow over a Vertical Plate with Localized Heating (Cooling), Magnetic Field and Suction (Injection)". Springer Verlag.
- Hussanan, A., Ismail, Z., Khan, I., Hussein, A., dan Shafie,S. (2014), "Unsteady Boundary Layer MHD Free Convection Flow in a Porous Medium with Constant Mass Diffusion and Newtonian Heating". *The European Physical Journal Plus*. 1-16.
- Ishak, A., Nazar, R., Arifin, N.M. dan Pop, I. (2007), "Mixed Convection of The Stagnation Point Flow Towards a Stretching Vertical Permeable Sheet". *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 1(2),217-226.
- Ishak, A., Nazar, R. dan Pop, I. (2010), "MHD Mixed Convection Flow Adjacent to A Vertical Plate with Prescribed Surface Temperature". *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 53(21),4506-4510.
- Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Layer Flow of Viscoelastic Fluid*. University Technology Malaysia. Malaysia.
- Khalimah, D.A. (2016), *Analisa Aliran Tak Tunak Konveksi Paksa Fluida Kental Magnetohidrodinamik (MHD) yang Melewati Silinder Eliptik*. Tesis Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.

- Makinde, O.D. dan Aziz, A. (2010), MHD Mixed Convection from a Vertical Porous Plate Embedded in a Porous Medium with a Convective Boundary Condition. *International Journal of Thermal Sciences*. 49 (2010), 1813-1820.
- Mohammad, N.F. (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamics Convective Boundary Layer Flow Past A Sphere in Viscous and Micropolar Fluids*. Universiti Teknologi Malaysia. Malaysia.
- Mukhopadhyay, S dan Mandal, I.S. (2014), "Magnetohydrodynamic (MHD) Mixed Convection Slip Flow and Heat Transfer over a Vertical Plate". *Engineering, Science and Technology an International Journal*. 18(2015),98-105.
- Munson, B., Young, D.F., dan Okiishi, T.H. (2003), *Mekanika Fluida Jilid 4*. Erlangga. Jakarta.
- Pop, I.I., dan Ingham, D.B. (2001), *Convective Heat Transfer : Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluid*. Elsevier Science and Technology Books.
- Siswono, G.O. (2015), *Analisa Aliran Konveksi Campuran pada Fluida Viskoelastik Magnetohydrodynamics (MHD) yang melewati Silinder Berpori*. Tesis Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- Wanti, P.P. (2015), *Fluida Viskoelastik yang Melewati Pelat Datar dengan Memperhatikan Faktor Hidrodinamika Magnet*. Tesis Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*. ITSpress. Surabaya.
- Widodo, B., Imron, C., Khalimah, D.A. dan Zainal, F.D. (2015), "The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magnetohydrodynamic Boundary Layer Flow of a Viscous Fluid Past A Sphere", *International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE) Kuala Lumpur, Malaysia*, 16 Oktober 2015.
- Widodo, B., dkk (2016), "Viscoelastic Fluid Flow Past a Porous Circular Cylinder when The Magnetic Field Included", *Far East Journal of Mathematical Sciences-Puspha Publishing House-India*, Vol 99(2),173-186.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Firdha Dwishafarina Zainal, dilahirkan di Kota Surabaya, pada 15 Maret 1993 dan merupakan anak kedua dari empat bersaudara pasangan (alm) M. Zainal dan Tini Widiati. Pendidikan formal ditempuh mulai dari SDN Pacar Kembang III Surabaya, lulus pada tahun 2004 dilanjutkan ke pendidikan SMP Negeri 2 Surabaya lulus pada tahun 2007, dan melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 7 Surabaya, lulus pada tahun 2010. Kemudian pada tahun 2010 penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, lulus pada tahun 2014 dan melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Pada jenjang S1 penulis mengambil bidang minat Pemodelan Matematika dan Simulasi dengan judul Tugas Akhir yaitu: Analisis Kestabilan pada Model Transmisi Virus Hepatitis B yang Dipengaruhi oleh Migrasi, sedangkan pada jenjang S2 penulis mengambil bidang minat Pemodelan Matematika dan Simulasi khususnya pada bidang Komputasi Dinamika. Informasi, kritik, dan saran yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail: firdhadwish@gmail.com.